

Usean muuttujan funktiot

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Olkoon $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funktio, jolle ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia.

Olkoon $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funktio, jolle ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia. Olkoon $(x_0, y_0) \in A$. Tällöin funktion f arvoja voidaan approksimoida funktion

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Olkoon $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funktio, jolle ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia. Olkoon $(x_0, y_0) \in A$. Tällöin funktion f arvoja voidaan approksimoida funktion

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

arvoilla. Siis $f(x, y) \approx L(x, y)$ lähellä pistettä (x_0, y_0) .

Olkoon $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funktio, jolle ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia. Olkoon $(x_0, y_0) \in A$. Tällöin funktion f arvoja voidaan approksimoida funktion

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

arvoilla. Siis $f(x, y) \approx L(x, y)$ lähellä pistettä (x_0, y_0) .

Huomautus

Merkitään $\Delta x = x - x_0$ ja $\Delta y = y - y_0$. Tällöin funktion arvon muutos Δf on

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &\approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y.\end{aligned}$$

Määritelmä

Lauseketta

$$\begin{aligned}\Delta f &= df \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy.\end{aligned}$$

kutsutaan **kokonaisdifferentiaaliksi**.

Tutki, kuinka monta prosenttia likimäärin muuttuu heilurin heilahdusaika

$T(l, g) = 2\pi\sqrt{l/g}$, jos heilurin pituus l kasvaa 2 % ja putoamiskiihtyvyys g pienenee 0.6 %.

Tutki, kuinka monta prosenttia likimäärin muuttuu heilurin heilahdusaika $T(l, g) = 2\pi\sqrt{l/g}$, jos heilurin pituus l kasvaa 2 % ja putoamiskiihtyvyys g pienenee 0.6 %.

Havaitaan, että

$$T(l, g) = 2\pi\sqrt{l/g} = 2\pi l^{1/2} g^{-1/2}.$$

Tutki, kuinka monta prosenttia likimäärin muuttuu heilurin heilahdusaika $T(l, g) = 2\pi\sqrt{l/g}$, jos heilurin pituus l kasvaa 2 % ja putoamiskiihtyvyys g pienenee 0.6 %.

Havaitaan, että

$$T(l, g) = 2\pi\sqrt{l/g} = 2\pi l^{1/2} g^{-1/2}.$$

Koska $\sqrt{x}' = 1/2\sqrt{x}$ ja $(1/\sqrt{x})' = -1/2x\sqrt{x}$, niin

$$T_l(l, g) = \frac{\pi}{\sqrt{lg}}, \quad T_g = -\frac{\pi\sqrt{l}}{g\sqrt{g}}.$$

Tutki, kuinka monta prosenttia likimäärin muuttuu heilurin heilahdusaika $T(l, g) = 2\pi\sqrt{l/g}$, jos heilurin pituus l kasvaa 2 % ja putoamiskiihtyvyys g pienenee 0.6 %.

Havaitaan, että

$$T(l, g) = 2\pi\sqrt{l/g} = 2\pi l^{1/2} g^{-1/2}.$$

Koska $\sqrt{x}' = 1/2\sqrt{x}$ ja $(1/\sqrt{x})' = -1/2x\sqrt{x}$, niin

$$T_l(l, g) = \frac{\pi}{\sqrt{lg}}, \quad T_g = -\frac{\pi\sqrt{l}}{g\sqrt{g}}.$$

Lasketaan nyt arvio suhteelliselle virheelle $(\Delta T)/T$. Kokonaisdifferentiaalin nojalla

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{T} &\approx \left(T_l(l, g)\Delta l + T_g(l, g)\Delta g \right) / T \\ &= \left(\frac{\pi}{\sqrt{lg}}\Delta l - \frac{\pi\sqrt{l}}{g\sqrt{g}}\Delta g \right) / 2\pi\sqrt{l/g} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}. \end{aligned}$$

Tutki, kuinka monta prosenttia likimäärin muuttuu heilurin heilahdusaika

$T(l, g) = 2\pi\sqrt{l/g}$, jos heilurin pituus l kasvaa 2 % ja putoamiskiihtyvyys g pienenee 0.6 %.

Tutki, kuinka monta prosenttia likimäärin muuttuu heilurin heilahdusaika $T(l, g) = 2\pi\sqrt{l/g}$, jos heilurin pituus l kasvaa 2 % ja putoamiskiihtyvyys g pienenee 0.6 %.

Saatiin suhteelliselle virheelle kaava

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}.$$

Tutki, kuinka monta prosenttia likimäärin muuttuu heilurin heilahdusaika $T(l, g) = 2\pi\sqrt{l/g}$, jos heilurin pituus l kasvaa 2 % ja putoamiskiihtyvyys g pienenee 0.6 %.

Saatiin suhteelliselle virheelle kaava

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}.$$

Nyt $\Delta l/l = 2 \% = 2/100$ ja $\Delta g/g = -0.6 \% = -0.6/100$, joten

Tutki, kuinka monta prosenttia likimäärin muuttuu heilurin heilahdusaika $T(l, g) = 2\pi\sqrt{l/g}$, jos heilurin pituus l kasvaa 2 % ja putoamiskiihtyvyys g pienenee 0.6 %.

Saatiin suhteelliselle virheelle kaava

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}.$$

Nyt $\Delta l/l = 2 \% = 2/100$ ja $\Delta g/g = -0.6 \% = -0.6/100$, joten

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{2}{100} - \frac{1}{2} \left(-\frac{0.6}{100} \right) = \frac{1.3}{100} = 1.3 \%.$$

Tutki, kuinka monta prosenttia likimäärin muuttuu heilurin heilahdusaika $T(l, g) = 2\pi\sqrt{l/g}$, jos heilurin pituus l kasvaa 2 % ja putoamiskiihtyvyys g pienenee 0.6 %.

Saatiin suhteelliselle virheelle kaava

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}.$$

Nyt $\Delta l/l = 2 \% = 2/100$ ja $\Delta g/g = -0.6 \% = -0.6/100$, joten

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{2}{100} - \frac{1}{2} \left(-\frac{0.6}{100} \right) = \frac{1.3}{100} = 1.3 \%.$$

Siis heilahdusaika kasvaa 1.3 %.