

# Usean muuttujan funktiot

Itä-Suomen yliopisto,  
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF  
EASTERN FINLAND

## Määritelmä

### Lauseketta

$$\begin{aligned}\Delta f &= df \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy.\end{aligned}$$

kutsutaan **kokonaisdifferentiaaliksi**.

Saadaan virhekaava

$$|\Delta f| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \Delta y \right|.$$

Tutki, kuinka monta prosenttia likimäärin muuttuu heilurin heilahdusaika  $T(l, g) = 2\pi\sqrt{l/g}$ , jos heilurin pituus  $l$  kasvaa 2 % ja putoamiskiihtyvyys  $g$  pienenee 0.6 %.

Havaitaan, että

$$T(l, g) = 2\pi\sqrt{l/g} = 2\pi l^{1/2} g^{-1/2}.$$

Koska  $\sqrt{x}' = 1/2\sqrt{x}$  ja  $(1/\sqrt{x})' = -1/2x\sqrt{x}$ , niin

$$T_l(l, g) = \frac{\pi}{\sqrt{lg}}, \quad T_g = -\frac{\pi\sqrt{l}}{g\sqrt{g}}.$$

Lasketaan nyt arvio suhteelliselle virheelle  $(\Delta T)/T$ . Kokonaisdifferentiaalin nojalla

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{T} &\approx \left( T_l(l, g)\Delta l + T_g(l, g)\Delta g \right) / T \\ &= \left( \frac{\pi}{\sqrt{lg}}\Delta l - \frac{\pi\sqrt{l}}{g\sqrt{g}}\Delta g \right) / 2\pi\sqrt{l/g} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}. \end{aligned}$$

Kaava

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}$$

Kaava

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}$$

saadaan toisellakin tavalla.

Kaava

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}$$

saadaan toisellakin tavalla. Ajatellaan, että  $l$  ja  $g$  riippuvat parametrasta  $t$  eli  $l = l(t)$  ja  $g = g(t)$ .

Kaava

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}$$

saadaan toisellakin tavalla. Ajatellaan, että  $l$  ja  $g$  riippuvat parametrasta  $t$  eli  $l = l(t)$  ja  $g = g(t)$ . Tällöin myös heilahdusaika riippuu parametrasta  $t$  eli  $T(t) = 2\pi\sqrt{l(t)/g(t)}$ .

Kaava

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}$$

saadaan toisellakin tavalla. Ajatellaan, että  $l$  ja  $g$  riippuvat parametrasta  $t$  eli  $l = l(t)$  ja  $g = g(t)$ . Tällöin myös heilahdusaika riippuu parametrasta  $t$  eli  $T(t) = 2\pi\sqrt{l(t)/g(t)}$ .

Muistetaan logaritmin laskusäännöt, eli  $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ ,  $\ln(a^b) = b\ln(a)$  ja  $\ln(1/a) = -\ln(a)$ , sekä derivointikaava  $(\ln(x))' = 1/x$ .

Muistetaan logaritmin laskusäännöt, eli  $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ ,  $\ln(a^b) = b\ln(a)$  ja  $\ln(1/a) = -\ln(a)$ , sekä derivointikaava  $(\ln(x))' = 1/x$ .

Muistetaan logaritmin laskusäännöt, eli  $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ ,  $\ln(a^b) = b \ln(a)$  ja  $\ln(1/a) = -\ln(a)$ , sekä derivointikaava  $(\ln(x))' = 1/x$ .

Funktiolle  $T(t) = 2\pi\sqrt{l(t)/g(t)}$  saadaan

Muistetaan logaritmin laskusäännöt, eli  $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ ,  $\ln(a^b) = b \ln(a)$  ja  $\ln(1/a) = -\ln(a)$ , sekä derivointikaava  $(\ln(x))' = 1/x$ .

Funktiolle  $T(t) = 2\pi\sqrt{l(t)/g(t)}$  saadaan

$$\ln(T(t)) = \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \ln(l(t)) - \frac{1}{2} \ln(g(t)).$$

Muistetaan logaritmin laskusäännöt, eli  $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ ,  $\ln(a^b) = b \ln(a)$  ja  $\ln(1/a) = -\ln(a)$ , sekä derivointikaava  $(\ln(x))' = 1/x$ .

Funktiolle  $T(t) = 2\pi\sqrt{l(t)/g(t)}$  saadaan

$$\ln(T(t)) = \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \ln(l(t)) - \frac{1}{2} \ln(g(t)).$$

Derivoimalla parametrin  $t$  suhteen saadaan

$$\frac{T'}{T} = \frac{1}{2} \frac{l'}{l} - \frac{1}{2} \frac{g'}{g}.$$

Muistetaan logaritmin laskusäännöt, eli  $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ ,  $\ln(a^b) = b \ln(a)$  ja  $\ln(1/a) = -\ln(a)$ , sekä derivointikaava  $(\ln(x))' = 1/x$ .

Funktiolle  $T(t) = 2\pi\sqrt{l(t)/g(t)}$  saadaan

$$\ln(T(t)) = \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \ln(l(t)) - \frac{1}{2} \ln(g(t)).$$

Derivoimalla parametrin  $t$  suhteen saadaan

$$\frac{T'}{T} = \frac{1}{2} \frac{l'}{l} - \frac{1}{2} \frac{g'}{g}.$$

Jos ajatellaan, että  $\Delta T = T'(t)$ ,  $\Delta l = l'(t)$  ja  $\Delta g = g'(t)$  niin saadaan

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}$$

Muistetaan logaritmin laskusäännöt, eli  $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ ,  $\ln(a^b) = b \ln(a)$  ja  $\ln(1/a) = -\ln(a)$ , sekä derivointikaava  $(\ln(x))' = 1/x$ .

Funktiolle  $T(t) = 2\pi\sqrt{l(t)/g(t)}$  saadaan

$$\ln(T(t)) = \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \ln(l(t)) - \frac{1}{2} \ln(g(t)).$$

Derivoimalla parametrin  $t$  suhteen saadaan

$$\frac{T'}{T} = \frac{1}{2} \frac{l'}{l} - \frac{1}{2} \frac{g'}{g}.$$

Jos ajatellaan, että  $\Delta T = T'(t)$ ,  $\Delta l = l'(t)$  ja  $\Delta g = g'(t)$  niin saadaan

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}$$

eli sama kaava kuin aiemmin.