

Usean muuttujan funktiot

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Esimerkki

Raudan lämpölaajenemiskerroin on $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$. Museorautatien $l = 10 \text{ m}$ pitkä kisko on talvella lämpötilassa -30°C ja kesällä auringonpaisteessa lämpötilassa 40°C . Kuinka paljon kiskon pituus vaihtelee?

Esimerkki

Raudan lämpölaajenemiskerroin on $a = 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$. Museorautatien $l = 10 \text{ m}$ pitkä kisko on talvella lämpötilassa -30°C ja kesällä auringonpaisteessa lämpötilassa 40°C . Kuinka paljon kiskon pituus vaihtelee?

Siis $l = l(T) = l_0(1 + aT)$, missä l_0 on jokin kiinteä pituus. Saadaan

Esimerkki

Raudan lämpölaajenemiskerroin on $a = 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$. Museorautatien $l = 10 \text{ m}$ pitkä kisko on talvella lämpötilassa -30°C ja kesällä auringonpaisteessa lämpötilassa 40°C . Kuinka paljon kiskon pituus vaihtelee?

Siis $l = l(T) = l_0(1 + aT)$, missä l_0 on jokin kiinteä pituus. Saadaan

$$\Delta l = l_0 a \Delta T = 10 \cdot 0.000012 \cdot 70 \text{ m} = 0.0084 \text{ m} = 8.4 \text{ mm}.$$

Esimerkki

Raudasta valmistetun kesämökin kattopelti on 1 m leveä ja 4 m pitkä. Kuinka paljon pellin pinta-ala vaihtelee lämpötilavälillä $-40^{\circ}\text{C}..40^{\circ}\text{C}$?

Esimerkki

Raudasta valmistetun kesämökin kattopelti on 1 m leveä ja 4 m pitkä. Kuinka paljon pellin pinta-ala vaihtelee lämpötilavälillä $-40^{\circ}\text{C}..40^{\circ}\text{C}$?

Jos leveys on L ja pituus on P , niin pellin pinta-ala on $A = LP$.

Esimerkki

Raudasta valmistetun kesämökin kattopelti on 1 m leveä ja 4 m pitkä. Kuinka paljon pellin pinta-ala vaihtelee lämpötilavälillä $-40^{\circ}\text{C}..40^{\circ}\text{C}$?

Jos leveys on L ja pituus on P , niin pellin pinta-ala on $A = LP$. Oletetaan, että pelti laajenee yhdenmukaisesti kumpaankin suuntaan, jolloin $L = L_0(1 + \alpha T)$ ja $P = P_0(1 + \alpha T)$. Siis

Esimerkki

Raudasta valmistetun kesämökin kattopelti on 1 m leveä ja 4 m pitkä. Kuinka paljon pellin pinta-ala vaihtelee lämpötilavälillä $-40^{\circ}\text{C}..40^{\circ}\text{C}$?

Jos leveys on L ja pituus on P , niin pellin pinta-ala on $A = LP$. Oletetaan, että pelti laajenee yhdenmukaisesti kumpaankin suuntaan, jolloin $L = L_0(1 + aT)$ ja $P = P_0(1 + aT)$. Siis

$$A = L_0(1 + aT)P_0(1 + aT) = L_0P_0(1 + 2aT + a^2T^2) = A_0(1 + 2aT + a^2T^2)$$

Esimerkki

Raudasta valmistetun kesämökin kattopelti on 1 m leveä ja 4 m pitkä. Kuinka paljon pellin pinta-ala vaihtelee lämpötilavälillä $-40^{\circ}\text{C}..40^{\circ}\text{C}$?

Jos leveys on L ja pituus on P , niin pellin pinta-ala on $A = LP$. Oletetaan, että pelti laajenee yhdenmukaisesti kumpaankin suuntaan, jolloin $L = L_0(1 + aT)$ ja $P = P_0(1 + aT)$. Siis

$$A = L_0(1 + aT)P_0(1 + aT) = L_0P_0(1 + 2aT + a^2T^2) = A_0(1 + 2aT + a^2T^2)$$

Raudalle $a = 12 \cdot 10^{-6}$ ja siten $a^2 = 144 \cdot 10^{-12}$ on häviävän pieni verrattuna lukuun a . Saadaan

Esimerkki

Raudasta valmistetun kesämökin kattopelti on 1 m leveä ja 4 m pitkä. Kuinka paljon pellin pinta-ala vaihtelee lämpötilavälillä $-40^{\circ}\text{C}..40^{\circ}\text{C}$?

Jos leveys on L ja pituus on P , niin pellin pinta-ala on $A = LP$. Oletetaan, että pelti laajenee yhdenmukaisesti kumpaankin suuntaan, jolloin $L = L_0(1 + aT)$ ja $P = P_0(1 + aT)$. Siis

$$A = L_0(1 + aT)P_0(1 + aT) = L_0P_0(1 + 2aT + a^2T^2) = A_0(1 + 2aT + a^2T^2)$$

Raudalle $a = 12 \cdot 10^{-6}$ ja siten $a^2 = 144 \cdot 10^{-12}$ on häviävän pieni verrattuna lukuun a . Saadaan

$$A \approx A_0(1 + 2aT) = A_0(1 + bT),$$

Esimerkki

Raudasta valmistetun kesämökin kattopelti on 1 m leveä ja 4 m pitkä. Kuinka paljon pellin pinta-ala vaihtelee lämpötilavälillä $-40^{\circ}\text{C}..40^{\circ}\text{C}$?

Jos leveys on L ja pituus on P , niin pellin pinta-ala on $A = LP$. Oletetaan, että pelti laajenee yhdenmukaisesti kumpaankin suuntaan, jolloin $L = L_0(1 + aT)$ ja $P = P_0(1 + aT)$. Siis

$$A = L_0(1 + aT)P_0(1 + aT) = L_0P_0(1 + 2aT + a^2T^2) = A_0(1 + 2aT + a^2T^2)$$

Raudalle $a = 12 \cdot 10^{-6}$ ja siten $a^2 = 144 \cdot 10^{-12}$ on häviävän pieni verrattuna lukuun a . Saadaan

$$A \approx A_0(1 + 2aT) = A_0(1 + bT),$$

missä $b = 2a = 24 \cdot 10^{-6}$.

Esimerkki

Raudasta valmistetun kesämökin kattopelti on 1 m leveä ja 4 m pitkä. Kuinka paljon pellin pinta-ala vaihtelee lämpötilavälillä -40°C .. 40°C ?

Esimerkki

Raudasta valmistetun kesämökin kattopelti on 1 m leveä ja 4 m pitkä. Kuinka paljon pellin pinta-ala vaihtelee lämpötilavälillä $-40^{\circ}\text{C}..40^{\circ}\text{C}$?

Saatiin

$$A \approx A_0(1 + 2\alpha T) = A_0(1 + bT),$$

Esimerkki

Raudasta valmistetun kesämökin kattopelti on 1 m leveä ja 4 m pitkä. Kuinka paljon pellin pinta-ala vaihtelee lämpötilavälillä $-40^{\circ}\text{C}..40^{\circ}\text{C}$?

Saatiin

$$A \approx A_0(1 + 2aT) = A_0(1 + bT),$$

missä $b = 2a = 24 \cdot 10^{-6}$. Siis

Esimerkki

Raudasta valmistetun kesämökin kattopelti on 1 m leveä ja 4 m pitkä. Kuinka paljon pellin pinta-ala vaihtelee lämpötilavälillä $-40^{\circ}\text{C}..40^{\circ}\text{C}$?

Saatiin

$$A \approx A_0(1 + 2aT) = A_0(1 + bT),$$

missä $b = 2a = 24 \cdot 10^{-6}$. Siis

$$\Delta A = A_0 b \Delta T = 4(\text{m}^2) \cdot 0.000024 \cdot 80 = 0.00768 \text{ m}^2 = 7.6 \text{ cm}^2.$$

Esimerkki (kokonaisdifferentiaalia hyödyntäen)

Raudasta valmistetun kesämökin kattopelti on 1 m leveä ja 4 m pitkä. Kuinka paljon pellin pinta-ala vaihtelee lämpötilavälillä -40°C .. 40°C ?

Esimerkki (kokonaisdifferentiaalia hyödyntäen)

Raudasta valmistetun kesämökin kattopelti on 1 m leveä ja 4 m pitkä. Kuinka paljon pellin pinta-ala vaihtelee lämpötilavälillä $-40^{\circ}\text{C}..40^{\circ}\text{C}$?

Jos leveys on L ja pituus on P , niin pellin pinta-ala on $A = LP$.

Esimerkki (kokonaisdifferentiaalia hyödyntäen)

Raudasta valmistetun kesämökin kattopelti on 1 m leveä ja 4 m pitkä. Kuinka paljon pellin pinta-ala vaihtelee lämpötilavälillä $-40^{\circ}\text{C}..40^{\circ}\text{C}$?

Jos leveys on L ja pituus on P , niin pellin pinta-ala on $A = LP$. Oletetaan, että pelti laajenee yhdenmukaisesti kumpaankin suuntaan, jolloin $L = L + \Delta L = L + La\Delta T$ ja $P = P + \Delta P = P + Pa\Delta T$. Siis

Esimerkki (kokonaisdifferentiaalia hyödyntäen)

Raudasta valmistetun kesämökin kattopelti on 1 m leveä ja 4 m pitkä. Kuinka paljon pellin pinta-ala vaihtelee lämpötilavälillä $-40^{\circ}\text{C}..40^{\circ}\text{C}$?

Jos leveys on L ja pituus on P , niin pellin pinta-ala on $A = LP$. Oletetaan, että pelti laajenee yhdenmukaisesti kumpaankin suuntaan, jolloin

$L = L + \Delta L = L + La\Delta T$ ja $P = P + \Delta P = P + Pa\Delta T$. Siis

$$\begin{aligned}\Delta A &= A_L \Delta L + A_P \Delta P \\ &= P \Delta L + L \Delta P \\ &= P(La\Delta T) + L(Pa\Delta T) = LP(2a\Delta T) = A(2a\Delta T).\end{aligned}$$

Esimerkki (kokonaisdifferentiaalia hyödyntäen)

Raudasta valmistetun kesämökin kattopelti on 1 m leveä ja 4 m pitkä. Kuinka paljon pellin pinta-ala vaihtelee lämpötilavälillä $-40^{\circ}\text{C}..40^{\circ}\text{C}$?

Jos leveys on L ja pituus on P , niin pellin pinta-ala on $A = LP$. Oletetaan, että pelti laajenee yhdenmukaisesti kumpaankin suuntaan, jolloin

$L = L + \Delta L = L + La\Delta T$ ja $P = P + \Delta P = P + Pa\Delta T$. Siis

$$\begin{aligned}\Delta A &= A_L \Delta L + A_P \Delta P \\ &= P \Delta L + L \Delta P \\ &= P(La\Delta T) + L(Pa\Delta T) = LP(2a\Delta T) = A(2a\Delta T).\end{aligned}$$

Siis

$$\Delta A = A(2a\Delta T) = 4 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 80 (\text{m}^2) = 7.6 \text{ cm}^2.$$

Esimerkki

Rautakuution lämpötila huoneenlämmössä on 10 cm . Tiedevideoiden tekijä on lämmittänyt raudasta tehdyn kuution lämpötilaan 1400°C ja tiputtaa kuution lammen jälle. Mikä on kuuman rautakuution tilavuus?

Esimerkki

Rautakuution lämpötila huoneenlämmössä on 10 °C. Tiedevideoiden tekijä on lämmittänyt raudasta tehdyn kuution lämpötilaan 1400 °C ja tiputtaa kuution lammen jälle. Mikä on kuumen rautakuution tilavuus?

Tilavuus noudattaa kaavaa

$$V = (A_0(1 + \alpha T))^3 = A_0^3(1 + 3\alpha T + 3\alpha^2 T^2 + \alpha^3 T^3) \approx V_0^3(1 + cT),$$

Esimerkki

Rautakuution lämpötila huoneenlämmössä on 10 °C. Tiedevideoiden tekijä on lämmittänyt raudasta tehdyn kuution lämpötilaan 1400 °C ja tiputtaa kuution lammen jälle. Mikä on kuumen rautakuution tilavuus?

Tilavuus noudattaa kaavaa

$$V = (A_0(1 + \alpha T))^3 = A_0^3(1 + 3\alpha T + 3\alpha^2 T^2 + \alpha^3 T^3) \approx V_0^3(1 + cT),$$

missä $c = 3\alpha = 36 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$. Saadaan

Esimerkki

Rautakuution lämpötila huoneenlämmössä on 10 cm. Tiedevideoiden tekijä on lämmittänyt raudasta tehdyn kuution lämpötilaan 1400°C ja tiputtaa kuution lammen jälle. Mikä on kuumen rautakuution tilavuus?

Tilavuus noudattaa kaavaa

$$V = (A_0(1 + aT))^3 = A_0^3(1 + 3aT + 3a^2T^2 + a^3T^3) \approx V_0^3(1 + cT),$$

missä $c = 3a = 36 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$. Saadaan

$$V = 1 \cdot (1 + 0.000036 \cdot 1400) = 1.0504 \text{ dm}^3.$$

Esimerkki

Rautakuution lämpötila huoneenlämmössä on 10 cm. Tiedevideoiden tekijä on lämmittänyt raudasta tehdyn kuution lämpötilaan 1400°C ja tiputtaa kuution lammen jälle. Mikä on kuumen rautakuution tilavuus?

Tilavuus noudattaa kaavaa

$$V = (A_0(1 + aT))^3 = A_0^3(1 + 3aT + 3a^2T^2 + a^3T^3) \approx V_0^3(1 + cT),$$

missä $c = 3a = 36 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$. Saadaan

$$V = 1 \cdot (1 + 0.000036 \cdot 1400) = 1.0504 \text{ dm}^3.$$

Siis tilavuus on 5 % suurempi eli noin 50 ml eli puoli desiä suurempi.