

Usean muuttujan funktiot

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Suoran ympyrälieriön pohjan halkaisijaksi saatiin mittaamalla $d = 12.00 \pm 0.05$ (cm).

Suoran ympyrälieriön pohjan halkaisijaksi saatiin mittaamalla $d = 12.00 \pm 0.05$ (cm).

Virheen arvio 0.05 voi tulla

- mitan ominaisuuksista

Suoran ympyrälieriön pohjan halkaisijaksi saatiin mittaamalla $d = 12.00 \pm 0.05$ (cm).

Virheen arvio 0.05 voi tulla

- mitan ominaisuuksista
- arvioimalla mittaustilannetta

Suoran ympyrälieriön pohjan halkaisijaksi saatiin mittaamalla $d = 12.00 \pm 0.05$ (cm).

Virheen arvio 0.05 voi tulla

- mitan ominaisuuksista
- arvioimalla mittaustilannetta
- tilastollisesti havaintoja tarkastelemalla

Suoran ympyrälieriön pohjan halkaisijaksi saatiin mittaamalla $d = 12.00 \pm 0.05$ (cm).

Virheen arvio 0.05 voi tulla

- mitan ominaisuuksista
- arvioimalla mittaustilannetta
- tilastollisesti havaintoja tarkastelemalla

Millä tavoilla luku 0.05 (tai jokin vastaava luku) voitaisiin keksiä havaintoja tarkastelemalla?

Esimerkki

Matti ja Teppo haluavat selvittää vanhan pesäpallokentän pinta-alan, mutta mittanauha puuttuu. Kumpikin uskoo ottavansa noin metrin pituisia askeleita. Matti mittaa kentän pituuden P viidesti ja Teppo kentän leveyden L viidesti. Saaduista tuloksista lasketaan keskiarvot.

P_k [m]	L_k [m]
70	40
72	36
90	38
88	41
86	42
$P = 81.2$	$L = 39.4$

Keskiarvojen P ja L avulla kentän pinta-alalle saadaan arvio

$$A = PL = 81.2 \cdot 39.4 = 3199.28 \approx 3199 \text{ m}.$$

Kuinka tarkka arvio on? Pienimpien ja suurimpien mittausten perusteella saadaan

$$A_1 = 70 \cdot 36 = 2520, \quad A_2 = 90 \cdot 42 = 3780.$$

Esimerkki

Keskiarvojen avulla

$$A = 81.2 \cdot 39.4 \approx 3199 \text{ m.}$$

Pienimpien ja suurimpien mittausten avulla

$$A_1 = 70 \cdot 36 = 2520, \quad A_2 = 90 \cdot 42 = 3780.$$

Selvästi $2530 \leq A \leq 3780$, joten jakamalla luvulla $A = 3199$ saadaan

$$\frac{2530}{3199} = 0.79 \leq \frac{A}{A} \leq 1.18 = \frac{3780}{3199}.$$

Tällä ajattelutavalla tuloksessa voi olla 11 % tai 18 % virhe.

$P \text{ [m]}$	$L \text{ [m]}$
70	40
72	36
90	38
88	41
86	42
81.2	39.4.

Esimerkki

Käyttämällä kaavaa (otetaan annettuna)

P_k [m]	L_k [m]
$P_1 = 70$	$L_1 = 40$
$P_2 = 72$	$L_2 = 36$
$P_3 = 90$	$L_3 = 38$
$P_4 = 88$	$L_4 = 41$
$P_5 = 86$	$L_5 = 42$
$P = 81.2$	$L = 39.4$
$SE(P) = 4.22$	$SE(L) = 1.08$

$$SE(P) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^5 (P - P_k)^2}{5 - 1}}$$

saadaan pituuden mittausten keskivirheeksi $SE(P) = 4.22$ ja vastaavasti $SE(L) = 1.08$. Siis pituutta mitannut Matti teki keskimäärin 4 m virheen, kun taas Teppo teki keskimäärin 1 m virheen.

Esimerkki

P_k [m]	L_k [m]
$P_1 = 70$	$L_1 = 40$
$P_2 = 72$	$L_2 = 36$
$P_3 = 90$	$L_3 = 38$
$P_4 = 88$	$L_4 = 41$
$P_5 = 86$	$L_5 = 42$
$P = 81.2$ $SE(P)=4.22$	$L = 39.4$ $SE(L)=1.08$
$\Delta P = SE(P),$ $\Delta L = SE(L)$	

Matti teki keskimäärin 4 m virheen, kun taas Teppo teki keskimäärin 1 m virheen.

Huomioimalla Matin virhe, tulos on

$$A_1 = P \cdot L = (81.2 \pm 4.22) \cdot 39.4 = 3199 \pm 166.$$

Huomioimalla Tepon virhe, tulos on

$$A_2 = P \cdot L = 81.2 \cdot (39.4 \pm 1.07) = 3199 \pm 87.$$

Esimerkki

Saadaan arvioita

P_k [m]	L_k [m]
$P_1 = 70$	$L_1 = 40$
$P_2 = 72$	$L_2 = 36$
$P_3 = 90$	$L_3 = 38$
$P_4 = 88$	$L_4 = 41$
$P_5 = 86$	$L_5 = 42$
$P = 81.2$ $SE(P) = 4.22$ $\Delta P = SE(P),$	$L = 39.4$ $SE(L) = 1.08$ $\Delta L = SE(L)$

$$A_1 = (81.2 \pm 4.22) \cdot 39.4 = 3199 \pm 166$$

$$A_2 = 81.2 \cdot (39.4 \pm 1.07) = 3199 \pm 87$$

$$A_3 = (81.2 \pm 4.22) \cdot (39.4 \pm 1.07) \\ = 3199 \pm 166 \pm 87 \pm 4.52$$

$$A_4 = (P \pm \Delta P)(L \pm \Delta L) \\ = PL \pm L\Delta P \pm P\Delta L \pm \Delta P\Delta L.$$

Nähdään, että **termillä** $\Delta P\Delta L = 4.52$ **ei ole merkitystä**, joten tyydytään arvioon

$$A_5 = PL \pm L\Delta P \pm P\Delta L = 3199 \pm 166 \pm 87.$$

Miten pinta-alan $A = PL$ arvion

$$A \approx PL \pm L\Delta P \pm P\Delta L$$

eli $A \approx A \pm \Delta A$, missä

$$\Delta A = L\Delta P \pm P\Delta L$$

voisi selittää?

Taylorin kaavan mukaan

$$A(x, y) \approx A(x_0, y_0) + A_x(x_0, y_0)\Delta x + A_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Nyt $x = P$ ja $y = L$ ja $A_x = (PL)_P = L$, $A_y = (PL)_L = P$, eli

$$A \approx PL + \Delta A = PL + L\Delta P + P\Delta L.$$

Siis käytetään Taylorin kaavaa eli toisin sanoin [kokonaisdifferentiaalia](#).

Esimerkki (jatkuu)

Saatiin arvio

P_k [m]	L_k [m]
$P_1 = 70$	$L_1 = 40$
$P_2 = 72$	$L_2 = 36$
$P_3 = 90$	$L_3 = 38$
$P_4 = 88$	$L_4 = 41$
$P_5 = 86$	$L_5 = 42$
$P = 81.2$	$L = 39.4$
$SE(P) = 4.22$	$SE(L) = 1.08$
$\Delta P = SE(P),$	
$\Delta L = SE(L)$	

$$A_5 = PL \pm L\Delta P \pm P\Delta L = 3199 \pm 166 \pm 87.$$

Olisiko nyt $\pm 166 \pm 87 = 166 + 87$ vai esimerkiksi $\pm 166 \pm 87 = |166 - 87| = 79$?

Valitaan samanmerkkiset luvut, jolloin saadaan arvio

$$A_6 = PL \pm \underbrace{(L\Delta P \pm P\Delta L)}_{\text{kokonaisdifferentiaali}} = 3199 \pm 253.$$

Esimerkki

P_k [m]	L_k [m]
$P_1 = 70$	$L_1 = 40$
$P_2 = 72$	$L_2 = 36$
$P_3 = 90$	$L_3 = 38$
$P_4 = 88$	$L_4 = 41$
$P_5 = 86$	$L_5 = 42$
$P = 81.2$ $SE(P) = 4.22$ $\Delta P = SE(P),$ $\Delta L = SE(L)$	$L = 39.4$ $SE(L) = 1.08.$

Saatiin arvio

$$A_6 = PL \pm \underbrace{(L\Delta P \pm P\Delta L)}_{\text{kokonaisdifferentiaali}} = 3199 \pm 253.$$

Koska $253/3199 = 253/3199 = 0.079 = 7.9 \%$,
niin saadaan

$$A_6 = 3199(1 \pm 7.9 \%),$$

eli suhteelliselle virheelle saatiin arvio 7.9 %

Esimerkki

Saatiin arvio

P_k [m]	L_k [m]
$P_1 = 70$	$L_1 = 40$
$P_2 = 72$	$L_2 = 36$
$P_3 = 90$	$L_3 = 38$
$P_4 = 88$	$L_4 = 41$
$P_5 = 86$	$L_5 = 42$
$P = 81.2$ $SE(P) = 4.22$ $\Delta P = SE(P),$ $\Delta L = SE(L)$	$L = 39.4$ $SE(L) = 1.08.$

$$\begin{aligned}
 A_6 &= PL \pm (L\Delta P \pm P\Delta L) \\
 &= 3199 \pm 253 \\
 &= 3199(1 \pm 7.9 \%).
 \end{aligned}$$

Pyöristämällä kahteen merkitsevään numeroon saadaan

$$\begin{aligned}
 A_6 &= PL \pm (L\Delta P \pm P\Delta L) \\
 &= (3200 \pm 250) \text{ m}^2 \\
 &= 3200(1 \pm 7.9 \%) \text{ m}^2.
 \end{aligned}$$

Esimerkki

Pienimmät ja suurimmat arvot antoivat

$$2530 \leq A \leq 3780.$$

Keskivirheet $SE(P)$ ja $SE(L)$ antoivat

$$\begin{aligned} A_6 &= PL \pm (L\Delta P \pm P\Delta L) \\ &= (3200 \pm 250) \text{ m}^2 \\ &= 3200(1 \pm 7.9 \%) \text{ m}^2. \end{aligned}$$

P_k [m]	L_k [m]
$P_1 = 70$	$L_1 = 40$
$P_2 = 72$	$L_2 = 36$
$P_3 = 90$	$L_3 = 38$
$P_4 = 88$	$L_4 = 41$
$P_5 = 86$	$L_5 = 42$
$P = 81.2$ $SE(P)=4.22$ $\Delta P = SE(P),$ $\Delta L = SE(L)$	$L = 39.4$ $SE(L)=1.08.$

Lukujen ΔP ja ΔL tilalle voitaisiin valita jotkin mittausjärjestelystä johtuvat vakiot. Jos käytettäisiin mittanauhaa, sen tarkkuus voisi olla 1 cm, jolloin $\Delta P = \Delta L = 0.01 \text{ m}$ jolloin

$$A_7 = 3199 \pm (81.2 \cdot 0.01 + 39.4 \cdot 0.01) = (3199 \pm 1) \text{ m}^2.$$