

Usean muuttujan funktiot

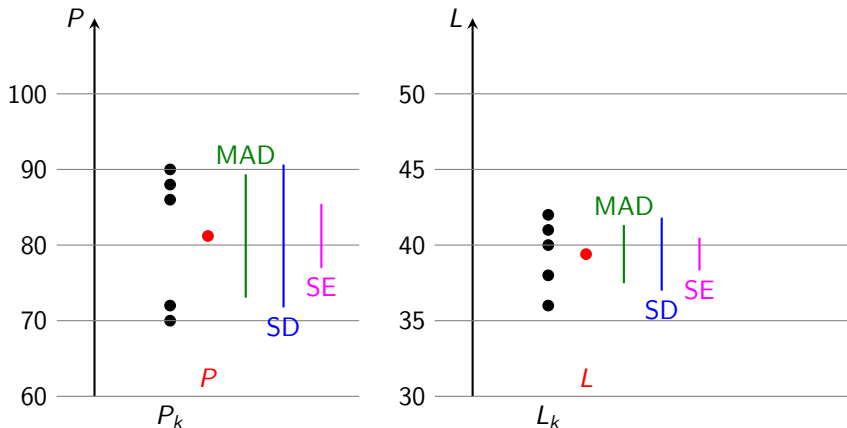
Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Suoran ympyrälieriön pohjan halkaisijaksi saatiin mittaamalla $d = 12.00 \pm 0.05$ (cm).

Miten virhearvion 0.05 voisi keksiä tilastollisesti toistuviinhavaintoihin perustuen?



MAD = keskimääräinen virhe = mean absolute deviation

SD = keskihajonta = standard deviation

SE = keskivirhe = standard error

Esimerkki

P_k [m]	L_k [m]
$P_1 = 70$	$L_1 = 40$
$P_2 = 72$	$L_2 = 36$
$P_3 = 90$	$L_3 = 38$
$P_4 = 88$	$L_4 = 41$
$P_5 = 86$	$L_5 = 42$
$P = 81.2$ SE(P)=4.22	$L = 39.4$ SE(L)=1.08.

Suureelle $A = PL$ saatiin arvio

$$\begin{aligned}
 A &= PL \pm \underbrace{(L\Delta P \pm P\Delta L)}_{\text{kokonaisdifferentiaali}} \\
 &= 3199 \pm (39.4 \cdot 4.22 + 81.2 \cdot 1.07) \\
 &= 3199 \pm 253 \text{ [m}^2\text{]}.
 \end{aligned}$$

Luvut ΔP ja ΔL voi valita käytettyjen mittalaitteiden perusteella.

Toisaalta voidaan käyttää esimerkiksi kaavoja

$$P = \frac{\sum_{k=1}^5 P_k}{5}, \quad \Delta(P) = SE(P) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^5 (P - P_k)^2}{5 - 1}}.$$

Tässä P on **keskiarvo** ja $SE(P)$ on **keskivirhe** (Standard Error).

Mitataan suure P yhteensä N kertaa. Tässä $N \geq 2$ on jokin luonnollinen luku.

Mitataan suure P yhteensä N kertaa. Tässä $N \geq 2$ on jokin luonnollinen luku.

Merkitään mittaustuloksia $P_1, P_2, \dots, P_N$.

Mitataan suure P yhteensä N kertaa. Tässä $N \geq 2$ on jokin luonnollinen luku.

Merkitään mittaustuloksia $P_1, P_2, \dots, P_N$.

Määritelmä

Luku

$$P = \frac{P_1 + P_2 + \dots + P_N}{N} = \frac{\sum_{k=1}^N P_k}{N} = AM(P) = KA(P)$$

Mitataan suure P yhteensä N kertaa. Tässä $N \geq 2$ on jokin luonnollinen luku.

Merkitään mittaustuloksia $P_1, P_2, \dots, P_N$.

Määritelmä

Luku

$$P = \frac{P_1 + P_2 + \dots + P_N}{N} = \frac{\sum_{k=1}^N P_k}{N} = AM(P) = KA(P)$$

on mittaustulosten (aritmeettinen) **keskiarvo** (Arithmetic Mean).

Mitataan suure P yhteensä N kertaa. Tässä $N \geq 2$ on jokin luonnollinen luku.

Merkitään mittaustuloksia $P_1, P_2, \dots, P_N$.

Määritelmä

Luku

$$P = \frac{P_1 + P_2 + \dots + P_N}{N} = \frac{\sum_{k=1}^N P_k}{N} = AM(P) = KA(P)$$

on mittaustulosten (aritmeettinen) **keskiarvo** (Arithmetic Mean).

Keskiarvoja on muitakin, esimerkiksi geometrinen keskiarvo ja neliöllinen keskiarvo

Mitataan suure P yhteensä N kertaa. Tässä $N \geq 2$ on jokin luonnollinen luku.

Merkitään mittaustuloksia $P_1, P_2, \dots, P_N$.

Määritelmä

Luku

$$P = \frac{P_1 + P_2 + \dots + P_N}{N} = \frac{\sum_{k=1}^N P_k}{N} = AM(P) = KA(P)$$

on mittaustulosten (aritmeettinen) **keskiarvo** (Arithmetic Mean).

Keskiarvoja on muitakin, esimerkiksi geometrinen keskiarvo ja neliöllinen keskiarvo

$$P_G = \sqrt[N]{P_1 P_2 \cdot P_N}, \quad P_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{n}(P_1^2 + P_2^2 + \dots + P_N^2)}$$

Mitataan suure P yhteensä N kertaa. Tässä $N \geq 2$ on jokin luonnollinen luku.

Merkitään mittaustuloksia $P_1, P_2, \dots, P_N$.

Määritelmä

Luku

$$P = \frac{P_1 + P_2 + \dots + P_N}{N} = \frac{\sum_{k=1}^N P_k}{N} = AM(P) = KA(P)$$

on mittaustulosten (aritmeettinen) **keskiarvo** (Arithmetic Mean).

Keskiarvoja on muitakin, esimerkiksi geometrinen keskiarvo ja neliöllinen keskiarvo

$$P_G = \sqrt[N]{P_1 P_2 \cdot P_N}, \quad P_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{n}(P_1^2 + P_2^2 + \dots + P_N^2)}$$

Tällaiset keskiarvot P , P_G , P_{rms} kuvaavat luvvektoria $(P_1, P_2, \dots, P_N)$.

Mitataan suure P yhteensä N kertaa. Tässä $N \geq 2$ on jokin luonnollinen luku.

Merkitään mittaustuloksia $P_1, P_2, \dots, P_N$.

Määritelmä

Luku

$$P = \frac{P_1 + P_2 + \dots + P_N}{N} = \frac{\sum_{k=1}^N P_k}{N} = AM(P) = KA(P)$$

on mittaustulosten (aritmeettinen) **keskiarvo** (Arithmetic Mean).

Keskiarvoja on muitakin, esimerkiksi geometrinen keskiarvo ja neliöllinen keskiarvo

$$P_G = \sqrt[N]{P_1 P_2 \cdot P_N}, \quad P_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{n}(P_1^2 + P_2^2 + \dots + P_N^2)}$$

Tällaiset keskiarvot P , P_G , P_{rms} kuvaavat luvvektoria $(P_1, P_2, \dots, P_N)$.

Riippuu tilanteesta, mikä keskiarvo on paras "mittari".

Mitataan suure P yhteensä N kertaa. Tässä $N \geq 2$ on jokin luonnollinen luku.

Merkitään mittaustuloksia $P_1, P_2, \dots, P_N$.

Määritelmä

Luku

$$P = \frac{P_1 + P_2 + \dots + P_N}{N} = \frac{\sum_{k=1}^N P_k}{N} = AM(P) = KA(P)$$

on mittaustulosten (aritmeettinen) **keskiarvo** (Arithmetic Mean).

Keskiarvoja on muitakin, esimerkiksi geometrinen keskiarvo ja neliöllinen keskiarvo

$$P_G = \sqrt[N]{P_1 P_2 \cdot P_N}, \quad P_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{n}(P_1^2 + P_2^2 + \dots + P_N^2)}$$

Tällaiset keskiarvot P , P_G , P_{rms} kuvaavat luvvektoria $(P_1, P_2, \dots, P_N)$.

Riippuu tilanteesta, mikä keskiarvo on paras "mittari".

Miten voidaan arvioida mittaustulosten vaihtelua?

Miten voidaan arvioida mittaustulosten vaihtelua?

P_k [m]	L_k [m]
$P_1 = 70$	$L_1 = 40$
$P_2 = 72$	$L_2 = 36$
$P_3 = 90$	$L_3 = 38$
$P_4 = 88$	$L_4 = 41$
$P_5 = 86$	$L_5 = 42$
$P = 81.2$	$L = 39.4$

Aluksi täytyy laskea keskiarvo, johon voidaan verrata.

Miten voidaan arvioida mittaustulosten vaihtelua?

P_k [m]	L_k [m]
$P_1 = 70$	$L_1 = 40$
$P_2 = 72$	$L_2 = 36$
$P_3 = 90$	$L_3 = 38$
$P_4 = 88$	$L_4 = 41$
$P_5 = 86$	$L_5 = 42$
$P = 81.2$	$L = 39.4$

Aluksi täytyy laskea keskiarvo, johon voidaan verrata. Matlabissa

```
Pk=[70,72,90,88,86];P=mean(Pk)  
P=81.2
```

Yksinkertaisinta on laskea kunkin mittauksen virhe ja ottaa keskiarvo. Saadaan **keskimääräinen virhe** MAD (Mean Absolute Deviation).

Yksinkertaisinta on laskea kunkin mittauksen virhe ja ottaa keskiarvo. Saadaan **keskimääräinen virhe** MAD (Mean Absolute Deviation).

	P_k	$ P_k - P $	L_k	$ L_k - L $
	$P_1 = 70$	11.2	$L_1 = 40$	0.6
	$P_2 = 72$	9.2	$L_2 = 36$	3.4
	$P_3 = 90$	8.2	$L_3 = 38$	1.4
	$P_4 = 88$	6.8	$L_4 = 41$	1.6
	$P_5 = 86$	4.8	$L_5 = 42$	2.6
KA	$P = 81.2$	$MAD(P) = 8.16$	$L = 39.4$	$MAD(L) = 1.92$

Matlabissa

Yksinkertaisinta on laskea kunkin mittauksen virhe ja ottaa keskiarvo. Saadaan **keskimääräinen virhe** MAD (Mean Absolute Deviation).

	P_k	$ P_k - P $	L_k	$ L_k - L $
	$P_1 = 70$	11.2	$L_1 = 40$	0.6
	$P_2 = 72$	9.2	$L_2 = 36$	3.4
	$P_3 = 90$	8.2	$L_3 = 38$	1.4
	$P_4 = 88$	6.8	$L_4 = 41$	1.6
	$P_5 = 86$	4.8	$L_5 = 42$	2.6
KA	$P = 81.2$	$MAD(P) = 8.16$	$L = 39.4$	$MAD(L) = 1.92$

Matlabissa

```

Pk=[70,72,90,88,86];P=mean(Pk);PP=P*[1,1,1,1,1];
Pmad=mean(abs(Pk-PP))
Pmad=8.16
    
```

Siis

$$P_{\text{MAD}} = \frac{\sum_{k=1}^N |P_k - P|}{N} = MA(|P_k - P|).$$

Siis

$$P_{\text{MAD}} = \frac{\sum_{k=1}^N |P_k - P|}{N} = MA(|P_k - P|).$$

Jos käytetään neliöllistä keskiarvoa, saadaan

$$P_{\text{USSD}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N |P_k - P|^2}{N}}.$$

Siis

$$P_{\text{MAD}} = \frac{\sum_{k=1}^N |P_k - P|}{N} = MA(|P_k - P|).$$

Jos käytetään neliöllistä keskiarvoa, saadaan

$$P_{\text{USSD}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N |P_k - P|^2}{N}}.$$

Tätä kutsutaan **korjaamattomaksi keskihajontaksi** (Uncorrected Sample Standard Deviation).

Siis

$$P_{\text{MAD}} = \frac{\sum_{k=1}^N |P_k - P|}{N} = MA(|P_k - P|).$$

Jos käytetään neliöllistä keskiarvoa, saadaan

$$P_{\text{USSD}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N |P_k - P|^2}{N}}.$$

Tätä kutsutaan **korjaamattomaksi keskihajontaksi** (Uncorrected Sample Standard Deviation). Tämän luvun olisi tarkoitus mitata lukujen $|P_k - P|$ kokoa, mutta jokin on pielessä.

Tutkitaan miten lähellä luvut P_k ovat lukua P . Otetaan luvut P ja luvut $P_1, \dots, P_N$ annettuina. Saadaan

Tutkitaan miten lähellä luvut P_k ovat lukua P . Otetaan luvut P ja luvut $P_1, \dots, P_N$ annettuina. Saadaan

$$0 = P - P = \frac{\sum_{k=1}^N P_k}{N} - P = \frac{(\sum_{k=1}^N P_k) - NP}{N} = \frac{(\sum_{k=1}^N (P_k - P))}{N}.$$

Tutkitaan miten lähellä luvut P_k ovat lukua P . Otetaan luvut P ja luvut $P_1, \dots, P_N$ annettuina. Saadaan

$$0 = P - P = \frac{\sum_{k=1}^N P_k}{N} - P = \frac{(\sum_{k=1}^N P_k) - NP}{N} = \frac{(\sum_{k=1}^N (P_k - P))}{N}.$$

Siis

$$0 = \sum_{k=1}^N (P_k - P) = \sum_{k=1}^{N-1} (P_k - P) + (P_N - P),$$

Tutkitaan miten lähellä luvut P_k ovat lukua P . Otetaan luvut P ja luvut $P_1, \dots, P_N$ annettuina. Saadaan

$$0 = P - P = \frac{\sum_{k=1}^N P_k}{N} - P = \frac{(\sum_{k=1}^N P_k) - NP}{N} = \frac{(\sum_{k=1}^N (P_k - P))}{N}.$$

Siis

$$0 = \sum_{k=1}^N (P_k - P) = \sum_{k=1}^{N-1} (P_k - P) + (P_N - P),$$

joten

$$P_N = P + \sum_{k=1}^{N-1} (P_k - P).$$

Tutkitaan miten lähellä luvut P_k ovat lukua P . Otetaan luvut P ja luvut $P_1, \dots, P_N$ annettuina. Saadaan

$$0 = P - P = \frac{\sum_{k=1}^N P_k}{N} - P = \frac{(\sum_{k=1}^N P_k) - NP}{N} = \frac{(\sum_{k=1}^N (P_k - P))}{N}.$$

Siis

$$0 = \sum_{k=1}^N (P_k - P) = \sum_{k=1}^{N-1} (P_k - P) + (P_N - P),$$

joten

$$P_N = P + \sum_{k=1}^{N-1} (P_k - P).$$

Siis jos luvut $P, P_1, P_2, \dots, P_{N-1}$ on annettu, luku P_N riippuu näistä. Tämän vuoksi “oikeasti on vain $N - 1$ vapaata” lukua P_k joita verrataan. Tehdään Besselin korjaus: korvataan osoittajassa luku N luvulla $N - 1$.

Keskimääräinen virhe on

$$P_{\text{MAD}} = \frac{\sum_{k=1}^N |P_k - P|}{N} = MA(|P_k - P|).$$

Keskimääräinen virhe on

$$P_{\text{MAD}} = \frac{\sum_{k=1}^N |P_k - P|}{N} = MA(|P_k - P|).$$

Korjaamaton keskihajonta on

$$P_{\text{USSD}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N |P_k - P|^2}{N}}.$$

Keskimääräinen virhe on

$$P_{\text{MAD}} = \frac{\sum_{k=1}^N |P_k - P|}{N} = MA(|P_k - P|).$$

Korjaamaton keskihajonta on

$$P_{\text{USSD}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N |P_k - P|^2}{N}}.$$

Keskihajonta (Standard Deviation) on

$$P_{\text{SD}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N |P_k - P|^2}{N - 1}}.$$

Lasketaan keskihajonta.

Lasketaan keskihajonta.

	P_k	$ P_k - P $	L_k	$ L_k - L $
	$P_1 = 70$	11.2	$L_1 = 40$	0.6
	$P_2 = 72$	9.2	$L_2 = 36$	3.4
	$P_3 = 90$	8.2	$L_3 = 38$	1.4
	$P_4 = 88$	6.8	$L_4 = 41$	1.6
	$P_5 = 86$	4.8	$L_5 = 42$	2.6
KA	$P = 81.2$	$MAD(P) = 8.16$ $SD(P) = 9.44$	$L = 39.4$	$MAD(L) = 1.92$ $SD(L) = 2.41$

Matlabissa

Lasketaan keskihajonta.

	P_k	$ P_k - P $	L_k	$ L_k - L $
	$P_1 = 70$	11.2	$L_1 = 40$	0.6
	$P_2 = 72$	9.2	$L_2 = 36$	3.4
	$P_3 = 90$	8.2	$L_3 = 38$	1.4
	$P_4 = 88$	6.8	$L_4 = 41$	1.6
	$P_5 = 86$	4.8	$L_5 = 42$	2.6
KA	$P = 81.2$	$MAD(P) = 8.16$ $SD(P) = 9.44$	$L = 39.4$	$MAD(L) = 1.92$ $SD(L) = 2.41$

Matlabissa

```
Pk=[70,72,90,88,86];SDP=std(P)
SDP=9.44
```

Keskiarvo P "edustaa" lukuja P_k

$$P = \frac{\sum_{k=1}^N P_k}{N}$$

Keskiarvo P "edustaa" lukuja P_k

$$P = \frac{\sum_{k=1}^N P_k}{N}$$

Keskihajonta mittaa lukujen P_k etäisyyttä luvuista P (neliöllinen keskiarvo, korjattu)

$$P_{\text{SD}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N |P_k - P|^2}{N - 1}}.$$

Keskiarvo P "edustaa" lukuja P_k

$$P = \frac{\sum_{k=1}^N P_k}{N}$$

Keskihajonta mittaa lukujen P_k etäisyyttä luvuista P (neliöllinen keskiarvo, korjattu)

$$P_{\text{SD}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N |P_k - P|^2}{N - 1}}.$$

Mikäli lukuja P_k arvotaan/tuotetaan samalla menetelmällä enemmän, **keskihajonta ei oleellisesti muutu**. Jos on luvut $P_1, P_2, \dots, P_{1000}$, niin

Keskiarvo P "edustaa" lukuja P_k

$$P = \frac{\sum_{k=1}^N P_k}{N}$$

Keskihajonta mittaa lukujen P_k etäisyyttä luvusta P (neliöllinen keskiarvo, korjattu)

$$P_{\text{SD}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N |P_k - P|^2}{N - 1}}.$$

Mikäli lukuja P_k arvotaan/tuotetaan samalla menetelmällä enemmän, **keskihajonta ei oleellisesti muutu**. Jos on luvut $P_1, P_2, \dots, P_{1000}$, niin

$$\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{100} |P_k - P|^2}{100 - 1}} \approx \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{1000} |P_k - P|^2}{1000 - 1}}.$$

Keskiarvo P "edustaa" lukuja P_k

$$P = \frac{\sum_{k=1}^N P_k}{N}$$

Keskihajonta mittaa lukujen P_k etäisyyttä luvusta P (neliöllinen keskiarvo, korjattu)

$$P_{SD} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N |P_k - P|^2}{N - 1}}.$$

Mikäli lukuja P_k arvotaan/tuotetaan samalla menetelmällä enemmän, **keskihajonta ei oleellisesti muutu**. Jos on luvut $P_1, P_2, \dots, P_{1000}$, niin

$$\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{100} |P_k - P|^2}{100 - 1}} \approx \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{1000} |P_k - P|^2}{1000 - 1}}.$$

Matlab-ajossa 6.6.2020 komennolla

```
p1=rand(1,100);sd1=std(p1)
p2=rand(1,10^6);sd2=std(p2)
```

saatiin $sd1 = 0.276$, $sd2 = 0.288$.

Keskiarvo P "edustaa" lukuja P_k

$$P = \frac{\sum_{k=1}^N P_k}{N}$$

Keskiarvo P "edustaa" lukuja P_k

$$P = \frac{\sum_{k=1}^N P_k}{N}$$

Keskihajonta mittaa lukujen P_k etäisyyttä luvuista P (neliöllinen keskiarvo, korjattu)

Keskiarvo P "edustaa" lukuja P_k

$$P = \frac{\sum_{k=1}^N P_k}{N}$$

Keskihajonta mittaa lukujen P_k etäisyyttä luvuista P (neliöllinen keskiarvo, korjattu)

$$P_{\text{SD}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N |P_k - P|^2}{N - 1}}.$$

Keskiarvo P "edustaa" lukuja P_k

$$P = \frac{\sum_{k=1}^N P_k}{N}$$

Keskihajonta mittaa lukujen P_k etäisyyttä luvuista P (neliöllinen keskiarvo, korjattu)

$$P_{\text{SD}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N |P_k - P|^2}{N - 1}}.$$

Mikäli lukuja P_k arvotaan/tuotetaan samalla menetelmällä enemmän, **keskihajonta ei oleellisesti muutu**. Toisaalta [keskivirhe](#)

$$P_{\text{SE}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N |P_k - P|^2}{N - 1}}.$$

Keskiarvo P “edustaa” lukuja P_k

$$P = \frac{\sum_{k=1}^N P_k}{N}$$

Keskihajonta mittaa lukujen P_k etäisyyttä luvuista P (neliöllinen keskiarvo, korjattu)

$$P_{\text{SD}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N |P_k - P|^2}{N - 1}}.$$

Mikäli lukuja P_k arvotaan/tuotetaan samalla menetelmällä enemmän, **keskihajonta ei oleellisesti muutu**. Toisaalta [keskivirhe](#)

$$P_{\text{SE}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N |P_k - P|^2}{N - 1}}.$$

pienenee. Tämä liittyy siihen, että tekemällä useampia mittauksia, “vakuututaan” tuloksen oikeellisuudesta.

Lasketaan keskivirhe.

Lasketaan keskivirhe.

	P_k	$ P_k - P $	L_k	$ L_k - L $
	$P_1 = 70$	11.2	$L_1 = 40$	0.6
	$P_2 = 72$	9.2	$L_2 = 36$	3.4
	$P_3 = 90$	8.2	$L_3 = 38$	1.4
	$P_4 = 88$	6.8	$L_4 = 41$	1.6
	$P_5 = 86$	4.8	$L_5 = 42$	2.6
KA	$P = 81.2$	$MAD(P) = 8.16$ $SD(P) = 9.44$ $SE(P) = 4.22$	$L = 39.4$	$MAD(L) = 1.92$ $SD(L) = 2.41$ $SE(L) = 1.08$

Matlabissa

Lasketaan keskivirhe.

	P_k	$ P_k - P $	L_k	$ L_k - L $
	$P_1 = 70$	11.2	$L_1 = 40$	0.6
	$P_2 = 72$	9.2	$L_2 = 36$	3.4
	$P_3 = 90$	8.2	$L_3 = 38$	1.4
	$P_4 = 88$	6.8	$L_4 = 41$	1.6
	$P_5 = 86$	4.8	$L_5 = 42$	2.6
KA	$P = 81.2$	$MAD(P) = 8.16$ $SD(P) = 9.44$ $SE(P) = 4.22$	$L = 39.4$	$MAD(L) = 1.92$ $SD(L) = 2.41$ $SE(L) = 1.08$

Matlabissa

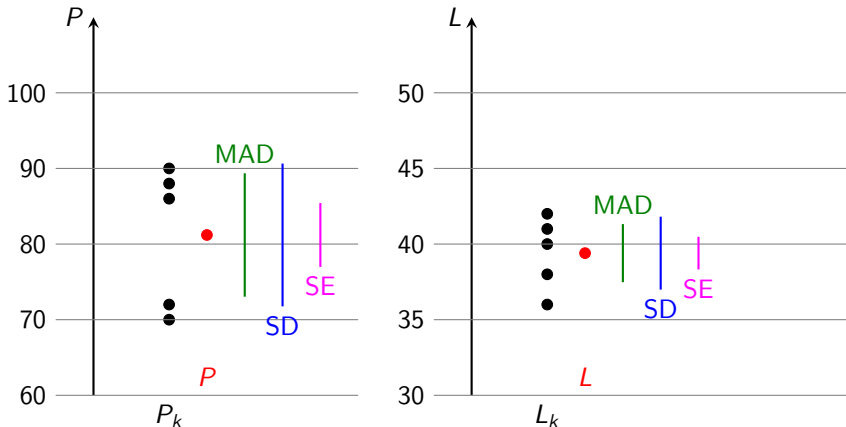
```
Pk=[70,72,90,88,86]; SEP=std(Pk)/sqrt(length(Pk))
SEP=4.22
```

	P_k	$ P_k - P $	L_k	$ L_k - L $
	$P_1 = 70$	11.2	$L_1 = 40$	0.6
	$P_2 = 72$	9.2	$L_2 = 36$	3.4
	$P_3 = 90$	8.2	$L_3 = 38$	1.4
	$P_4 = 88$	6.8	$L_4 = 41$	1.6
	$P_5 = 86$	4.8	$L_5 = 42$	2.6
KA	$P = 81.2$	$MAD(P) = 8.16$ $SD(P) = 9.44$ $SE(P) = 4.22$	$L = 39.4$	$MAD(L) = 1.92$ $SD(L) = 2.41$ $SE(L) = 1.08$

Kaikki koodit

```

Pk=[70,72,90,88,86]; P=mean(Pk); PP=P*[1,1,1,1,1];
Pmad=mean(abs(Pk-PP));
SDP=std(P);
SEP=std(Pk)/sqrt(length(Pk));
    
```



MAD = keskimääräinen virhe = mean absolute deviation

SD = keskihajonta = standard deviation

SE = keskivirhe = standard error