Pallo- ja sylinterikoordinaatit (luonnoksia)

Juha-Matti Huusko

24. toukokuuta 2020

1 Arkustangentti kahden muuttujan funktiona

Funktio $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ on bijektio (yksi-yhteen-vastaava). Sen käänteisfunktio on

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2).$$

Jos $x = R\cos\theta > 0$ ja $y = R\sin\theta$, jollakin $\theta \in (-\pi, \pi)$, niin täytyy olla $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Edelleen

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \in \mathbb{R}$$

joten saadaan $\theta = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Jos taas $x = R\cos\theta < 0$ ja $y = R\sin\theta$, jollakin $\theta \in (-\pi, \pi)$, niin täytyy olla $\theta \in (-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$. Siis kulman θ arvoa ei saada suoraan funktiota arctan käyttämällä, koska funktion arctan arvojoukko on $(-\pi/2, \pi/2)$.

Tyydyttävää yhden muuttujan funktiota ei voida määritellä, koska

$$\frac{y}{x} = \frac{-y}{-x},$$

siis yhden muuttujan funktio ei voi erottaa tilanteita $x, y > 0$ tilanteista $x, y < 0$. Kahden muuttujan funktiolla tämä ongelma poistuu.

Olkoon

$$C(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = r^2\}.$$

Määritellään $\text{atan}_2 : C(1) \to [0, 2\pi)$ siten, että

$$\text{atan}_2(y, x) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0, \\ \pi + \arctan \frac{y}{x}, & x < 0, \\ \frac{\pi}{2}, \quad x = 0, & y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, \quad x = 0, & y < 0. \end{cases}$$

Voidaan määritellä $\text{atan}_2 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$\text{atan}_2(x, y) = \text{atan}_2(x/r, y/r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Olkoon $(x, y) = R(\cos\theta, \sin\theta)$ täsmälleen silloin, kun $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja $R = 0$ tai $\theta = \text{atan}_2(y, x)$.

Tehtävä. Osoita, että atan_2 on jatkuva funktio joukossa $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Tehtävä. Osoita, että funktio $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{atan}_2(y,x)$ voidaan jatkaa jatkuvaksi funktioksi joukossa $\mathbb{R}^2$. Miten arvo $f(0,0)$ täytyy määritellä?

Funktio atan_2 on nyt määritelty joukossa $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Jos asetetaan $(0,0) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi)$, niin täytyy olla $R = 0$, ja on yhdentekevää, minkä arvon φ saa. Esimerkiksi tietokonelaskuissa voi vahingossa sattua niin, että $(x,y) = (0,0)$. Tämän vuoksi arvo $\mathrm{atan}_2(0,0)$ kannataa määritellä jollakin tavalla, jotta tietokone ei mene sekaisin, jos tätä arvoa kysytään. Asetetaan esimerkiksi $\mathrm{atan}_2(0,0) = 0$.

2 Tiivistelmä karteesisista, pallo- ja sylinterikoordinaateista

Asetetaan

$$\begin{cases} x &= R\cos\theta = r\cos\varphi\cos\theta \\ y &= R\sin\theta = r\cos\varphi\sin\theta \\ z &= r\sin\varphi \end{cases}$$

ja valitaan arvot $r, R \in [0,\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Tällöin $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Määritelmä.
Kolme lukua (x,y,z) ovat karteesiset koordinaatit.
Kolme lukua (r,φ,θ) ovat pallokoordinaatit.
Kolme lukua (R,θ,z) ovat sylinterikoordinaatit.

Näistä voidaan piirtää kuva. Kannattaa käyttää niitä koordinaatteja, jotka ovat tarkoitukseen sopivimmat. Koordinaateista voidaan johtaa toiset koordinaatit, katsotaan tätä seuraavaksi.

3 Karteesisten ja pallokoordinaattien välinen yhteys

Pallokoordinaateista (r,φ,θ) saadaan karteesiset (x,y,z)

$$\begin{cases} x &= r\cos\varphi\cos\theta \\ y &= r\cos\varphi\sin\theta \\ z &= r\sin\varphi \end{cases}$$

Voidaan rajoittaa $r \in (0,\infty)$, $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Tarvittaessa voidaan sallia muitakin arvoja.

Johdetaan karteesisista koordinaateista (x,y,z) pallokoordinaatit (r,φ,θ). Pallokoordinaateissa $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$, joten $\cos\varphi \in [0,1]$. Jos $(x,y) \neq (0,0)$, niin

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r\sin\varphi}{r|\cos\varphi|} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi.$$

Siis $\varphi = \mathrm{atan}_2(z, \sqrt{x^2+y^2})$.

Siis karteesisista koordinaateista (x, y, z) saadaan pallokoordinaatit (r, φ, θ) asettamalla

$$\begin{cases} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi &= \operatorname{atan}_2(z, \sqrt{x^2 + y^2}) \\ \theta &= \operatorname{atan}_2(y, x). \end{cases}$$

4 Karteesisten ja sylinterikoordinaattien välinen yhteys

Määritellään hyödyllinen luku $R = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Euklidisista koordinaateista saadaan sylinterikoordinaatit (R, θ, z)

$$\begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{atan}_2(y, x) \\ z = z. \end{cases}$$

Sylinterikoordinaateista (R, θ, z) saadaan karteesiset (x, y, z)

$$\begin{cases} x &= R\cos\theta \\ y &= R\sin\theta \\ z &= z. \end{cases}$$

5 Pallo- ja sylinterikoordinaattien välinen yhteys

Pallokoordinaateista (r, φ, θ) saadaan sylinterikoordinaatit (R, θ, z)

$$\begin{cases} R &= \sqrt{r^2 - R^2} \\ \theta &= \theta \\ z &= r\sin\varphi. \end{cases}$$

Sylinterikoordinaateista (R, θ, z) saadaan pallokoordinaatit

$$\begin{cases} r &= \sqrt{R^2 + z^2} \\ \varphi &= \operatorname{atan}_2(z, R) \\ \theta &= \theta. \end{cases}$$

6 Sovelluksia

6.1 Operaattoreita eri koordinaateissa

6.2 Karttoja