Pallo- ja sylinterikoordinaatit

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali

Arkustangentti kahden muuttujan funktiona

Funktio $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ on bijektio (yksi-yhteen-vastaava). Sen käänteisfunktio on

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2).$$

Jos $x = R\cos\theta > 0$ ja $y = R\sin\theta$, jollakin $\theta \in (-\pi, \pi)$, niin täytyy olla $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Edelleen

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \in \mathbb{R}$$

joten saadaan $\theta = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Arkustangentti kahden muuttujan funktiona

Funktio $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ on bijektio (yksi-yhteen-vastaava). Sen käänteisfunktio on

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2).$$

Jos taas $x = R\cos\theta < 0$ ja $y = R\sin\theta$, jollakin $\theta \in (-\pi, \pi)$, niin täytyy olla $\theta \in (-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$. Siis kulman θ arvoa ei saada suoraan funktiota arctan käyttämällä, koska funktion arctan arvojoukko on $(-\pi/2, \pi/2)$.

Tyydyttävää yhden muuttujan funktiota ei voida määritellä, koska

$$\frac{y}{x} = \frac{-y}{-x},$$

siis yhden muuttujan funktio ei voi erottaa tilanteita $x, y > 0$ tilanteista $x, y < 0$. Kahden muuttujan funktiolla tämä ongelma poistuu.

Arkustangentti kahden muuttujan funktiona

Olkoon

$$C(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = r^2\}.$$

Määritellään $\operatorname{atan}_2 : C(1) \to [0, 2\pi)$ siten, että

$$\operatorname{atan}_2(y, x) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0, \\ \pi + \arctan \frac{y}{x}, & x < 0, \\ \frac{\pi}{2}, \quad x = 0, & y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, \quad x = 0, & y < 0. \end{cases}$$

Voidaan määritellä $\operatorname{atan}_2 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$\operatorname{atan}_2(x,y) = \operatorname{atan}_2(x/r, y/r), \quad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Olkoon $(x,y) = R(\cos\theta, \sin\theta)$ täsmälleen silloin, kun $R = \sqrt{x^2+y^2}$ ja $R = 0$ tai $\theta = \operatorname{atan}_2(y,x)$.

Tehtävä. Osoita, että atan_2 on jatkuva funktio joukossa $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Tehtävä. Osoita, että funktio $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\operatorname{atan}_2(y,x)$ voidaan jatkaa jatkuvaksi funktioksi joukossa $\mathbb{R}^2$. Miten arvo $f(0,0)$ täytyy määritellä?

Arkustangentti kahden muuttujan funktiona

Funktio atan_2 on nyt määritelty joukossa $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Jos asetetaan $(0,0) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi)$, niin täytyy olla $R = 0$, ja on yhdentekevää, minkä arvon φ saa. Esimerkiksi tietokonelaskuissa voi vahingossa sattua niin, että $(x,y) = (0,0)$. Tämän vuoksi arvo $\operatorname{atan}_2(0,0)$ kannataa määritellä jollakin tavalla, jotta tietokone ei mene sekaisin, jos tätä arvoa kysytään. Asetetaan esimerkiksi $\operatorname{atan}_2(0,0) = 0$.