Pallo- ja sylinterikoordinaatit

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali

Asetetaan

$$\begin{cases} x &= R\cos\theta = r\cos\varphi\cos\theta \\ y &= R\sin\theta = r\cos\varphi\sin\theta \\ z &= r\sin\varphi \end{cases}$$

ja valitaan arvot $r, R \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Tällöin $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Määritelmä

Kolme lukua (x, y, z) ovat karteesiset koordinaatit.

Asetetaan

$$\begin{cases} x &= R\cos\theta = r\cos\varphi\cos\theta \\ y &= R\sin\theta = r\cos\varphi\sin\theta \\ z &= r\sin\varphi \end{cases}$$

ja valitaan arvot $r, R \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Tällöin $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Määritelmä

Kolme lukua (x, y, z) ovat karteesiset koordinaatit.

Kolme lukua (r, φ, θ) ovat pallokoordinaatit.

Asetetaan

$$\begin{cases} x &= R\cos\theta = r\cos\varphi\cos\theta \\ y &= R\sin\theta = r\cos\varphi\sin\theta \\ z &= r\sin\varphi \end{cases}$$

ja valitaan arvot $r, R \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Tällöin $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Määritelmä

Kolme lukua (x, y, z) ovat karteesiset koordinaatit.

Kolme lukua (r, φ, θ) ovat pallokoordinaatit.

Kolme lukua (R, θ, z) ovat sylinterikoordinaatit.

Määritelmä

Kolme lukua (x, y, z) ovat karteesiset koordinaatit.

Kolme lukua (r, φ, θ) ovat pallokoordinaatit.

Kolme lukua (R, θ, z) ovat sylinterikoordinaatit.

Näistä voidaan piirtää kuva. Kannattaa käyttää niitä koordinaatteja, jotka ovat tarkoitukseen sopivimmat. Koordinaateista voidaan johtaa toiset koordinaatit, katsotaan tätä seuraavaksi.

Pallokoordinaateista (r, φ, θ) saadaan karteesiset (x, y, z)

$$\begin{cases} x &= r\cos\varphi\cos\theta \\ y &= r\cos\varphi\sin\theta \\ z &= r\sin\varphi \end{cases}$$

Voidaan rajoittaa $r \in (0, \infty)$, $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Tarvittaessa voidaan sallia muitakin arvoja.

Johdetaan karteesisista koordinaateista (x, y, z) pallokoordinaatit (r, φ, θ). Pallokoordinaateissa $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$, joten $\cos\varphi \in [0, 1]$. Jos $(x, y) \neq (0, 0)$, niin

$$\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \sin\varphi}{r|\cos\varphi|} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi.$$

Siis $\varphi = \mathrm{atan}_2(z, \sqrt{x^2 + y^2})$.

Siis karteesisista koordinaateista (x, y, z) saadaan pallokoordinaatit (r, φ, θ) asettamalla

$$\begin{cases} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi &= \mathrm{atan}_2(z, \sqrt{x^2 + y^2}) \\ \theta &= \mathrm{atan}_2(y, x). \end{cases}$$

Määritellään hyödyllinen luku $R = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Euklidisista koordinaateista saadaan sylinterikoordinaatit (R, θ, z)

$$\begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \mathrm{atan}_2(y, x) \\ z = z. \end{cases}$$

Sylinterikoordinaateista (R, θ, z) saadaan karteesiset (x, y, z)

$$\begin{cases} x &= R\cos\theta \\ y &= R\sin\theta \\ z &= z. \end{cases}$$

Pallokoordinaateista (r, φ, θ) saadaan sylinterikoordinaatit (R, θ, z)

$$\begin{cases} R &= \sqrt{r^2 - R^2} \\ \theta &= \theta \\ z &= r \sin \varphi. \end{cases}$$

Sylinterikoordinaateista (R, θ, z) saadaan pallokoordinaatit

$$\begin{cases} r &= \sqrt{R^2 + z^2} \\ \varphi &= \mathrm{atan}_2(z, R) \\ \theta &= \theta. \end{cases}$$