

# 1 Raja-arvo

**Esimerkki 1.** Osoita, että raja-arvo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$$

ei ole olemassa.

---

**Ratkaisu 1.** Lasketaan aluksi raja-arvo pitkin suoraa  $x = 0$ .

*Kysymys.* Mitä raja-arvoksi saadaan?

☐ 1

☒ 0

☐  $\frac{1}{0} = \infty$

---

*Perustelu.* Kun  $x = 0$ , niin

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{0^6 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Seuraavaksi tulisi löytää jokin käyrä, jota pitkin saataisiin eri raja-arvoehdokas kuin 0.

*Kysymys.* Mikä on sopiva käyrä?

☒  $y = x^3$

☐  $y = 0$

☐  $y = x$

---

*Perustelu.* Kun  $y = x^3$ , niin nimittäjä sievenee muotoon.

$$x^6 + y^2 = x^6 + (x^3)^2 = 2x^6$$

Tarkastellaan siis raja-arvoa

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$$

pitkin käyrää  $y = x^3$ .

*Kysymys.* Mitä saadaan raja-arvoksi käyrää  $y = x^3$  pitkin?

☒  $\frac{1}{2}$

☐ 0

☐  $\infty$

---

*Perustelu.* Kun  $y = x^3$ , niin nimittäjä on siis  $2x^6$  ja saadaan

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{2x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Mikä loppupäätelmä on?

---

Käyriä  $x = 0$  ja  $y = x^3$  pitkin saatiin eri raja-arvoehdokkaat 0 ja  $\frac{1}{2}$ . Jos varsinainen raja-arvo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$$

olisi olemassa, niin sen täytyisi olla yksikäsitteinen. Siis varsinaista raja-arvoa ei voi olla olemassa.