Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali

UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Vektorien summaaminen ja vektorin kertominen vakiolla.

Esimerkki 5.1

Olkoon vektorit

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}\\ \mathbf{v} &= 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Vektorien summaaminen ja vektorin kertominen vakiolla.

Esimerkki 5.1

Olkoon vektorit

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k} \\ \mathbf{v} &= 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}. \\ \text{Tällöin} \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} &= 5\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}. \end{aligned}$$

UNIVERSITY OF EASTERN FINLAND

Vektorien summaaminen ja vektorin kertominen vakiolla.

Esimerkki 5.1

Olkoon vektorit

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k} \\ \mathbf{v} &= 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}. \\ \text{Tällöin} \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} &= 5\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Edelleen

$$\begin{aligned} 3\mathbf{u} &= 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k} \\ -2\mathbf{v} &= -6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Vektorien summaaminen ja vektorin kertominen vakiolla.

Esimerkki 5.1

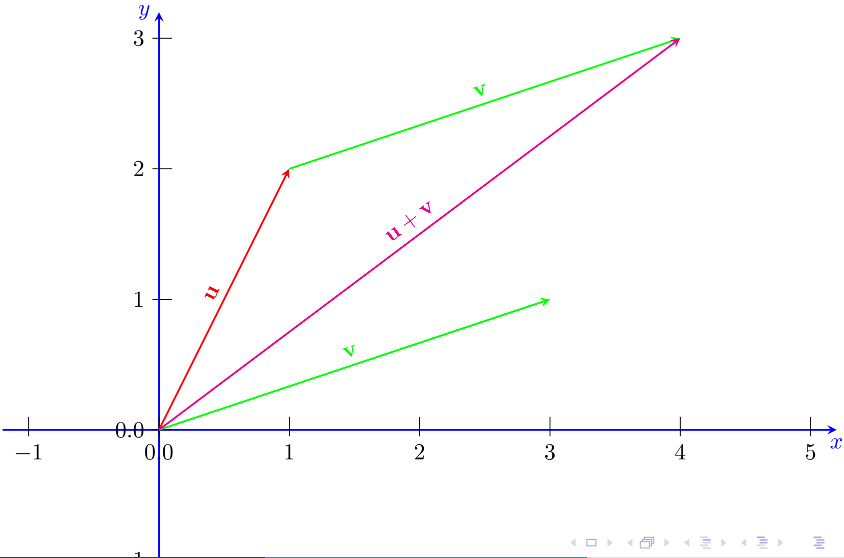
Olkoon vektorit

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k} \\ \mathbf{v} &= 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}. \\ \text{Tällöin} \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} &= 5\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}. \end{aligned}$$

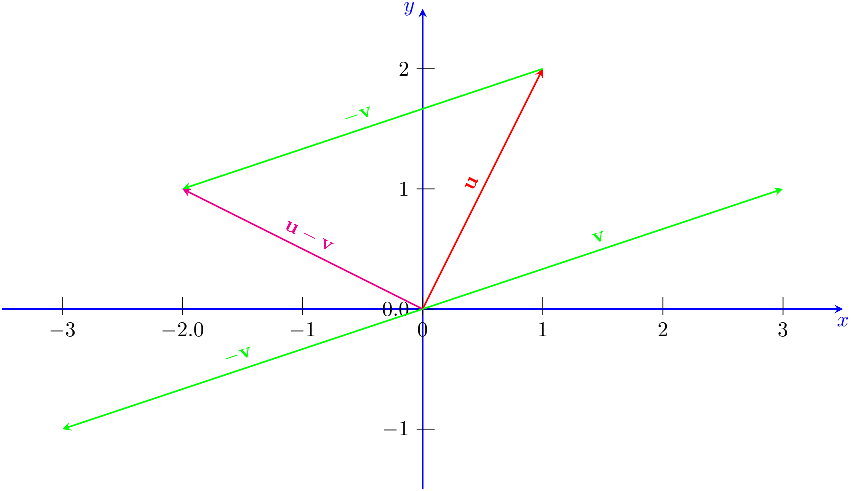
Edelleen

$$\begin{aligned} 3\mathbf{u} &= 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k} \\ -2\mathbf{v} &= -6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}. \\ \text{Siis} \quad 3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} &= 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}. \end{aligned}$$

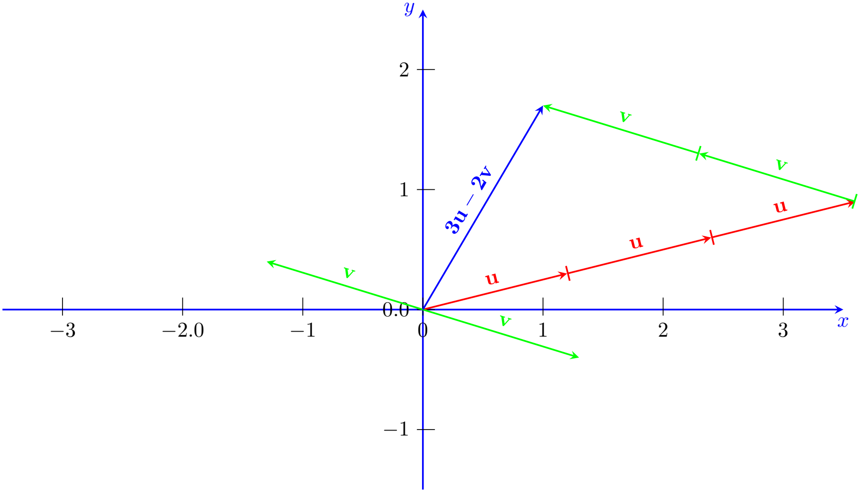
Graafisesti: Vektorien summaaminen.



Graafisesti: Vektorien erotus.



Graafisesti: Vektorien summaaminen ja vektorin kertominen vakiolla.



Vektorin pituus ja yksikkövektori.

Esimerkki 5.2

Olkoon

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

UNIVERSITY OF EASTERN FINLAND

Vektorin pituus ja yksikkövektori.

Esimerkki 5.2

Olkoon

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$\text{Tällöin} \quad |\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3.$$

Vektorin pituus ja yksikkövektori.

Esimerkki 5.2

Olkoon

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$\text{Tällöin} \quad |\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3.$$

Jakamalla vektori omalla pituudellaan, saadaan yksikkövektori

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{1}{3}\mathbf{u} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

Vektorin pituus ja yksikkövektori.

Esimerkki 5.2

Olkoon

$$\mathbf{u} = \mathbf{2i} + \mathbf{j} - \mathbf{2k}$$

$$\text{Tällöin} \quad |\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3.$$

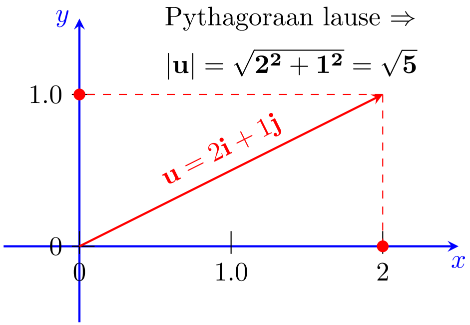
Jakamalla vektori omalla pituudellaan, saadaan yksikkövektori

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}(\mathbf{2i} + \mathbf{j} - \mathbf{2k}) = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\mathbf{i} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{j} - \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\mathbf{k}.$$

Yksikkövektorin pituus on yksi

$$|\hat{\mathbf{u}}| = \sqrt{\frac{2^2}{3^3} + \frac{1^2}{3^2} + \frac{2^2}{4^2}} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = 1.$$

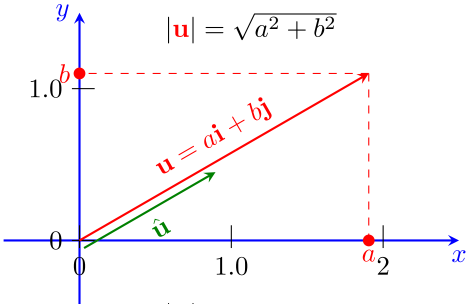
Graafisesti: Vektorin pituus.



Graafisesti: Yksikkövektori.

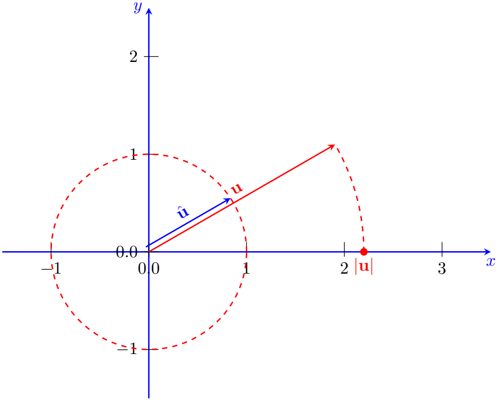
Pythagoraan lause $\Rightarrow$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$|\hat{\mathbf{u}}| = 1$$

Vektorin pituuden saisi selville myös kiertämällä vektorin esimerkiksi x-akselille.



Lause 5.3

Olkoon $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ *vektori. Yksikkövektorin* $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ *pituus on yksi.*

Todistus.

Olkoon $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Saadaan

$$P = |\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{x^2} + \mathbf{y^2} + \mathbf{z^2}}, \quad \hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{P}}\mathbf{i} + \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{P}}\mathbf{j} + \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{P}}\mathbf{k}.$$

Edelleen ($P > 0$, joten $\sqrt{P^2} = |P| = P$)

$$|\hat{\mathbf{v}}| = \sqrt{\frac{x^2}{P^2} + \frac{y^2}{P^2} + \frac{z^2}{P^2}} = \frac{1}{P}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{P}P = 1.$$

$\square$