

Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Vektorien summaaminen ja vektorin kertominen vakiolla.

Esimerkki 5.1

Olkoon vektorit

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Vektorien summaaminen ja vektorin kertominen vakiolla.

Esimerkki 5.1

Olkoon vektorit

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Tällöin $\mathbf{u} + \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$

Vektorien summaaminen ja vektorin kertominen vakiolla.

Esimerkki 5.1

Olkoon vektorit

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Tällöin $\mathbf{u} + \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$

Edelleen

$$3\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

$$-2\mathbf{v} = -6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Vektorien summaaminen ja vektorin kertominen vakiolla.

Esimerkki 5.1

Olkoon vektorit

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Tällöin $\mathbf{u} + \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$

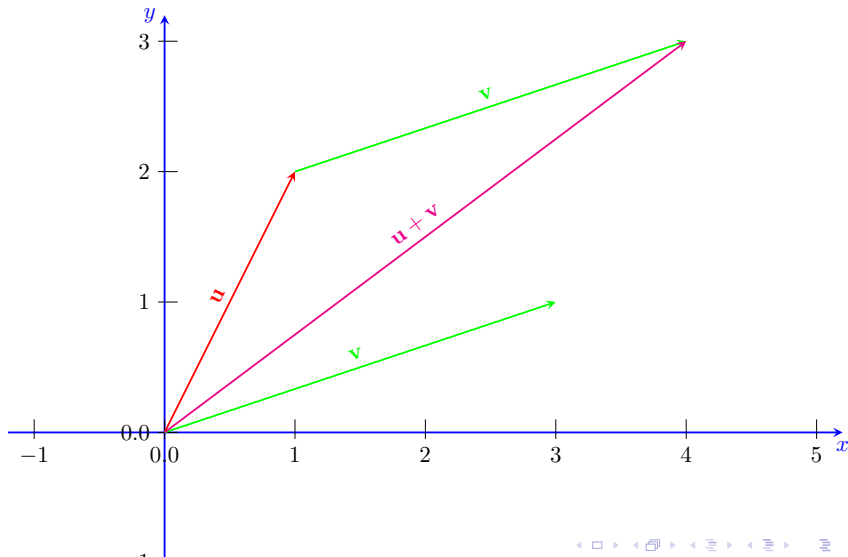
Edelleen

$$3\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

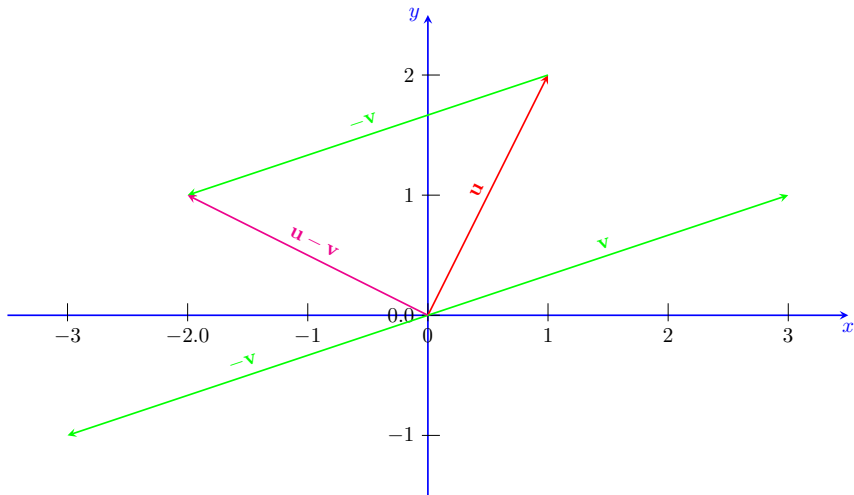
$$-2\mathbf{v} = -6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Siis $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}.$

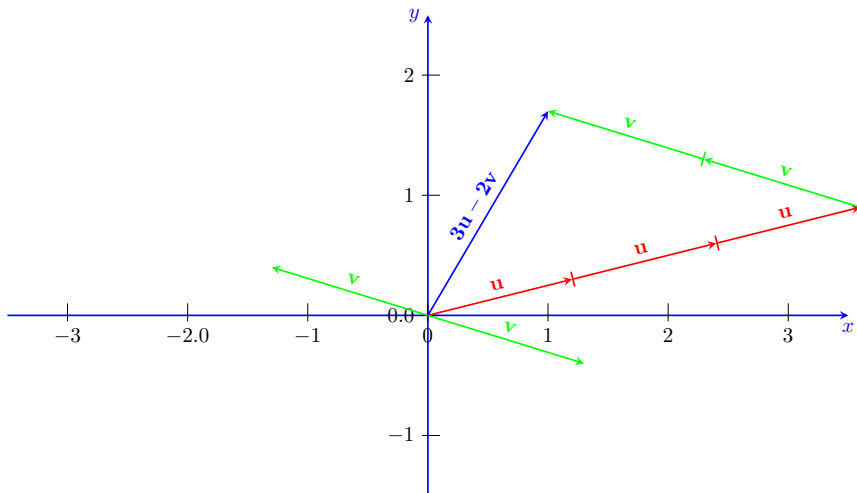
Graafisesti: Vektorien summaaminen.



Graafisesti: Vektorien erotus.



Graafisesti: Vektorien summaaminen ja vektorin kertominen vakiolla.



Vektorin pituus ja yksikkövektori.

Esimerkki 5.2

Olkoon

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

Vektorin pituus ja yksikkövektori.

Esimerkki 5.2

Olkoon

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$\text{Tällöin } |\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3.$$

Vektorin pituus ja yksikkövektori.

Esimerkki 5.2

Olkoon

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$\text{Tällöin } |\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3.$$

Jakamalla vektori omalla pituudellaan, saadaan yksikkövektori

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{1}{3}\mathbf{u} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

Vektorin pituus ja yksikkövektori.

Esimerkki 5.2

Olkoon

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$\text{Tällöin } |\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3.$$

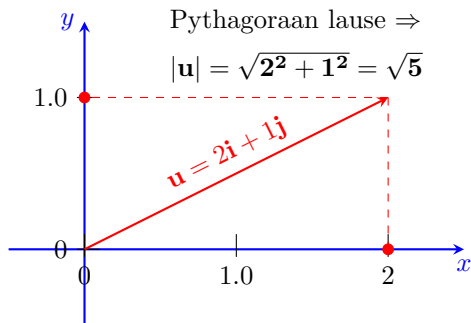
Jakamalla vektori omalla pituudellaan, saadaan yksikkövektori

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{1}{3}\mathbf{u} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

Yksikkövektorin pituus on yksi

$$|\hat{\mathbf{u}}| = \sqrt{\frac{2^2}{3^2} + \frac{1^2}{3^2} + \frac{2^2}{3^2}} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = 1.$$

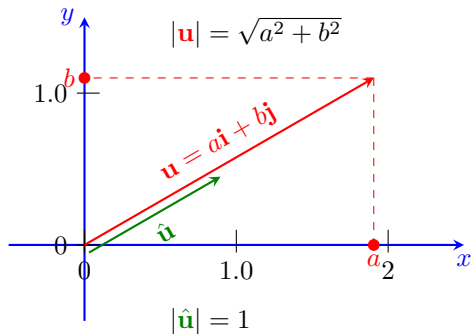
Graafisesti: Vektorin pituus.



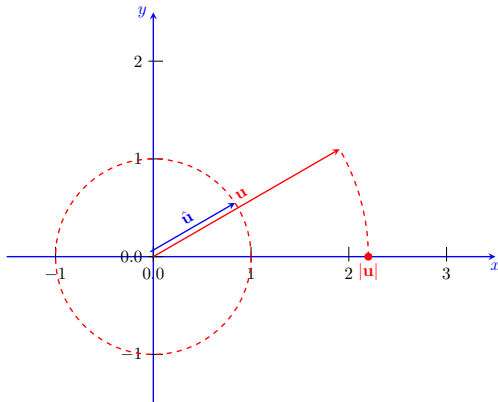
Graafisesti: Yksikkövektori.

Pythagoraan lause \Rightarrow

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Vektorin pituuden saisi selville myös kiertämällä vektorin esimerkiksi x -akselille.



Lause 5.3

Olkoon $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ vektori. Yksikkövektorin $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ pituus on yksi.

Todistus.

Olkoon $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Saadaan

$$P = |\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \hat{\mathbf{v}} = \frac{x}{P}\mathbf{i} + \frac{y}{P}\mathbf{j} + \frac{z}{P}\mathbf{k}.$$

Edelleen ($P > 0$, joten $\sqrt{P^2} = |P| = P$)

$$|\hat{\mathbf{v}}| = \sqrt{\frac{x^2}{P^2} + \frac{y^2}{P^2} + \frac{z^2}{P^2}} = \frac{1}{P} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{P} P = 1.$$

