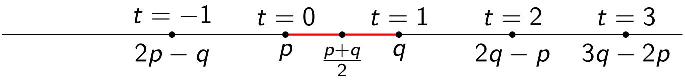
Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali

Kahden pisteen painotettu keskiarvo

Pisteitä $a(t) = p + (q - p)t, \quad t \in \mathbb{R}$



Olkoot p ja q pisteitä. Mikä on janan pq parametriesitys? Kuvan perusteella

$$a(t) = p + (q - p)t, \quad t \in [0, 1].$$

Jos $t \in [0, 1]$, niin $1 - t \in [0, 1]$. Siis

$$\begin{aligned} a(t) &= p + (q - p)t \\ &= p + qt - pt \\ &= (1 - t)p + tq \\ &= \alpha p + \beta q, \end{aligned}$$

missä $\alpha, \beta \in [0, 1]$ ja $\alpha + \beta = (1 - t) + t = 1$.

Kahden pisteen painotettu keskiarvo

Siis jana pq koostuu pisteistä

$$a(\alpha, \beta) = \alpha \boldsymbol{p} + \beta \boldsymbol{q}, \quad \alpha, \beta \in [0, 1], \quad \alpha + \beta = 1.$$

Esimerkiksi pisteiden p ja q keskiarvo/keskipiste

$$a(1/2, 1/2) = \frac{1}{2} p + \frac{1}{2} q = \frac{p + q}{2}.$$

Koska $\alpha + \beta = 1$, niin

$$\alpha \boldsymbol{p} + \beta \boldsymbol{q}$$

on pisteiden p ja q painotettu keskiarvo painoilla α, β.

Esimerkki 5.1 (tavallinen keskiarvo, painottamaton keskiarvo)

Heitetään 4-tahkoista (tetraedrin muotoista) noppaa. Oletetaan, että kaikki pisteluvuista 1,2,3,4 ovat yhtä todennäköisiä. Mikä on saatavan pisteluvun X odotusarvo?

Odotusarvo saadaan pistelukujen keskiarvona. Koska kaikki ovat yhtä todennäköisiä, pistelukuja “ei tarvitse painottaa”. Saadaan

$$E(X) = \frac{1+2+3+4}{4} = \frac{10}{4} = 2,5.$$

Toisaalta, joka pistelukua voidaan painottaa luvulla 1 ja saadaan sama tulos

$$E(X) = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot 4}{1+1+1+1} = \frac{10}{4} = 2,5.$$

Kahden pisteen painotettu keskiarvo

UNIVERSITY OF EASTERN FINLAND

Esimerkki 5.2 (painotettu keskiarvo)

Jussi tutkii 4-tahkoista (tetraedrin muotoista) noppaa heittämällä sitä 40 kertaa. Jussi saa pisteluvut

pisteluku X	lukumäärä
1	10 kpl
2	13 kpl
3	8 kpl
4	9 kpl.

Jussi laskee pisteluvun X odotusarvoksi

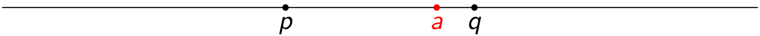
$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{10 \cdot 1 + 13 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 4}{10 + 13 + 8 + 9} \\ &= \frac{10 + 26 + 24 + 36}{40} = \frac{96}{40} = \frac{4 \cdot 24}{40} = \frac{24}{10} = 2,4. \end{aligned}$$

Ideaali 4-tahkoinen noppa antaisi odotusarvoksi $2,5$. Jussin 4-tahkoinen noppa antaa hieman enemmän pieniä pistelukuja.

Kahden pisteen painotettu keskiarvo

Missä sijaitsee piste $a = 0.2p + 0.8q$?
Koska $0.2 + 0.8 = 1$ ja molemmat luvut ovat välillä $[0, 1]$, niin piste sijaitsee janalla pq. Pistettä q painotetaan enemmän, joten a on lähempänä pistettä q.

$$\alpha = 0.2, \beta = 0.8$$

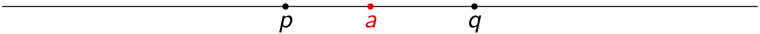


$$0.2p + 0.8q$$

Kahden pisteen painotettu keskiarvo

Missä sijaitsee piste $a = 0.55p + 0.45q$?
Koska $0.9 + 0.1 = 1$ ja molemmat luvut ovat välillä $[0, 1]$, niin piste a sijaitsee janalla pq. Pisteitä p ja q painotetaan melkein yhtä paljon, joten a on lähellä pisteiden p ja q keskipistettä. Pistettä p painotetaan hieman enemmän, joten a on pisteestä $\frac{p+q}{2}$ hieman pisteen p suuntaan.

$$\alpha = 0.55, \beta = 0.45$$

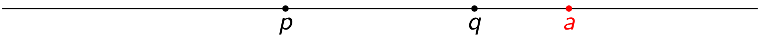


$$0.55p + 0.45q$$

Kahden pisteen painotettu keskiarvo

Missä sijaitsee piste $a = -0.5p + 1.5q$?
Koska $-0.5 + 1.5 = 1$, niin piste a sijaitsee suoralla $\overline{pq}$. Koska molemmat luvut $-0.5, 1.5$ eivät ole välilllä $[0, 1]$, niin piste a ei ole janalla pq. Pistettä q painotetaan luvulla 1.5 ja pistettä p negatiivisella luvulla -0.5. Siis piste a on eri puolella pistettä q kuin piste p.

$\alpha = -0.5, \beta = 1.5$



$-0.5p + 1.5q$

Kahden pisteen painotettu keskiarvo

Missä sijaitsee piste $a = 0.8p + 0.7q$?
Koska $0.8 + 0.7 = 1.5 \neq 0$, niin piste a ei todennäköisesti sijaitse suoralla $\overline{pq}$. Asia riippuu siitä, missä origo on. Jos esimerkiksi $p = (1, 0)$ ja $q = (2, 0)$, niin suora $\overline{pq}$ on x-akseli. Edelleen $a = (1.5, 0)$ on suoralla $\overline{pq}$.
Jos taas $p = (0, 1)$ ja $q = (2, 1)$, niin suora $\overline{pq}$ on suora $y = 1$. Piste $a = (1.4, 1.5)$ ei ole suoralla $\overline{pq}$.