Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali

Tason parametrisointi

Taso kulkee pisteiden p, q ja r kautta.
Siis tasolla on suuntavektorit $\mathbf{u} = q - p$ ja $\mathbf{v} = r - p$.
Siis tasolla on parametrisointi

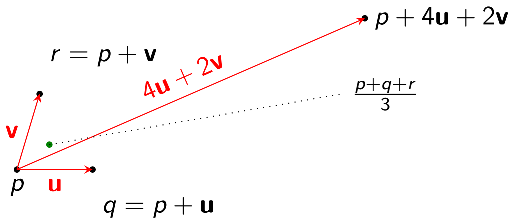
$$\begin{aligned} a(t,s) &= p + t\mathbf{u} + s\mathbf{v} \\ &= p + t(q-p) + s(r-p), \quad t, s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Antamalla parametreille t, s eri arvoja, saadaan kaikki tason eri pisteet. Esim.
$a(0,0) = p$, $a(1,0) = p + q - p = q$, $a(0,1) = p + r - p = r$,

$$\begin{aligned} a(1,1) &= p + q - p + r - p \\ &= q + r - p, \end{aligned}$$

$$a\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = p + \frac{q-p}{3} + \frac{r-p}{3} = \frac{3p + q - p + r - p}{2} = \frac{p+q+r}{3}.$$

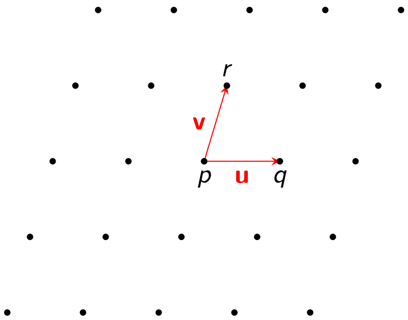
Pisteitä $a(t) = p + t(q - p) + s(r - p), \quad t, r \in \mathbb{R}$



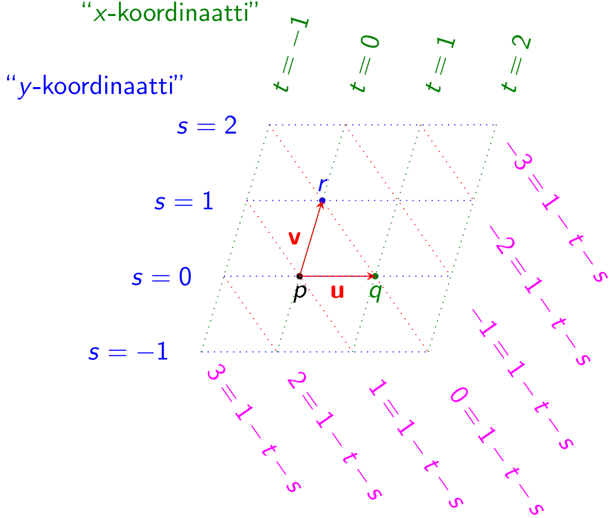
Tason parametrisointi

Jos t ja s ovat kokonaislukuja, pisteet $a(t) = p + t(q - p) + s(r - p)$ muodostavat säännöllisen "pistepilven", jota kutsutaan termillä hila.

$$\text{Pisteitä } a(t) = p + t(q - p) + s(r - p), \quad t, r \in \mathbb{Z}$$



Pisteitä $a(t,s) = p + t(q-p) + s(r-p), \quad t, r \in \mathbb{R}$



Pisteiden p, q, r kertoimet hahmottaa helposti apuviivaston avulla.

Huomaa, että jos $p = 0$, $\mathbf{u} = (1,0)$, $\mathbf{v} = (0,$
niin $p + t\mathbf{u} + s\mathbf{v} = (t,s)$.

“kolmas koordinaatti”

Tason parametrisointi

Pisteen

$$a(t,s) = p + t(q-p) + s(r-p), \quad t, r \in \mathbb{R}$$

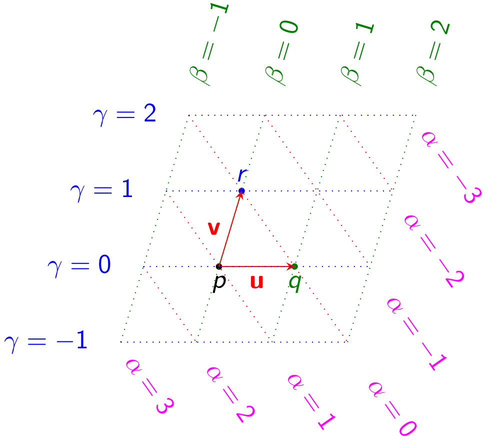
voi parametrisoida myös kolmen parametrin α, β, γ avulla.

Nimittäin

$$\begin{aligned} a(t,s) &= p + t(q-p) + s(r-p) \\ &= p + tq - tp + sr - sp \\ &= (1-t-s)p + tq + sr \\ &= \alpha p + \beta q + \gamma r = a(\alpha, \beta, \gamma), \end{aligned}$$

missä $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ja $\alpha + \beta + \gamma = (1-t-s) + t + s = 1$.

Pisteitä $a(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha \boldsymbol{p} + \beta \boldsymbol{q} + \gamma \boldsymbol{r}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \alpha + \beta + \gamma = 1$



Pisteiden p, q, r kertoimet hahmottaa helposti apuviivaston avulla.

Huomaa, että jos $p = 0$, $\mathbf{u} = (1, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1)$, niin $\alpha p + \beta q + \gamma r = \beta q + \gamma r$.

Tason parametrisointi

UNIVERSITY OF EASTERN FINLAND

Esimerkki 5.1

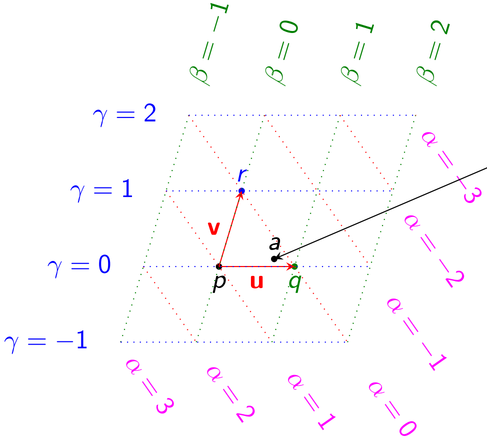
Olkoot p, q, r pisteitä. Missä on piste

$$a = 0.2p + 0.7q + 0.1r?$$

Koska $0.2 + 0.7 + 0.1 = 1$, niin a on painotettu keskiarvo pisteistä p, q, r. Siis a on pisteiden p, q, r määräämässä tasossa. Kaikki luvuista $0.2, 0.7, 0.1$ ovat välillä $[0, 1]$, joten a on kolmion pqr sisällä. Arvo 0.7 on suurin, joten piste a on melko lähellä pistettä q eli karkeasti sanottuna

$$a = 0.2p + 0.7q + 0.1r \approx 0 \cdot p + 1 \cdot q + 0 \cdot r = q.$$

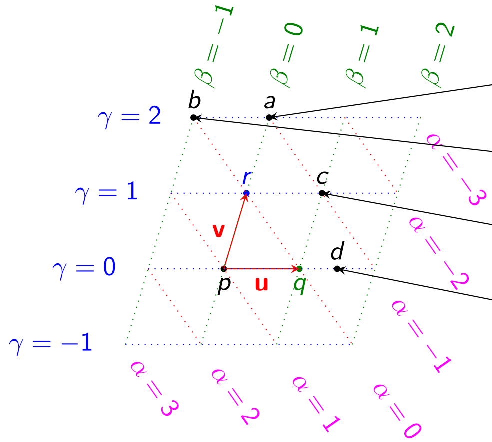
Pisteitä $a(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha p + \beta q + \gamma r$.



Missä on piste $a = 0.2p + 0.7q + 0.1r$?

tuolla

Pisteitä $a(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha p + \beta q + \gamma r$.



Missä ovat seuraavat pisteet?

$a = 2r - p$

$b = 2r - q$

$c = r + q - p$

$d = 1.5q - 0.5p$