Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali

Tason yhtälö determinantin avulla lausuttuna

Kolmen pisteen kautta kulkevan tason yhtälö voidaan lausua determinantin avulla.

Lause 5.1

Olkoot

$$\begin{aligned} p &= (p_1, p_2, p_3), \\ q &= (q_1, q_2, q_3), \\ r &= (r_1, r_2, r_3), \end{aligned}$$

kolme pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla.

Pisteiden p, q, r *kautta kulkevan tason yhtälö on*

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \\ r_1 - p_1 & r_2 - p_2 & r_3 - p_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \\ r_1 - p_1 & r_2 - p_2 & r_3 - p_3 \end{vmatrix}.$$

Todistus. Tasolla on parametrisointi

$$p + t(q - p) + s(r - p), \quad t, s \in \mathbb{R},$$

missä $\mathbf{u} = q - p$ ja $\mathbf{v} = r - p$ ovat tason suuntavektorit.

Tason normaali $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ toteuttaa

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \\ r_1 - p_1 & r_2 - p_2 & r_3 - p_3 \end{vmatrix}.$$

Tason yhtälö determinantin avulla lausuttuna

Tason normaali $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ toteuttaa

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \\ r_1 - p_1 & r_2 - p_2 & r_3 - p_3 \end{vmatrix}.$$

Merkitään $X = (x, y, z)$. Tason yhtälö on muotoa

$$\begin{aligned} & & \mathbf{n} \cdot (X - p) &= 0 \\ \Leftrightarrow & & \mathbf{n} \cdot (x - p_1, y - p_2, z - p_3) &= 0 \\ \Leftrightarrow & & \mathbf{n} \cdot [(x - p_1)\mathbf{i} + (y - p_2)\mathbf{j}(z - p_3)\mathbf{k}] &= 0. \end{aligned}$$

Tason yhtälö on muotoa

$$\mathbf{n} \cdot [(x - p_1)\mathbf{i} + (y - p_2)\mathbf{j}(z - p_3)\mathbf{k}] = 0.$$

Sijoittamalla tähän vektorin **n** esitys, saadaan

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \\ r_1 - p_1 & r_2 - p_2 & r_3 - p_3 \end{vmatrix} \cdot [(x - p_1)\mathbf{i} + (y - p_2)\mathbf{j}(z - p_3)\mathbf{k}] &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad &\begin{vmatrix} x - p_1 & y - p_2 & z - p_3 \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \\ r_1 - p_1 & r_2 - p_2 & r_3 - p_3 \end{vmatrix} &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad &\begin{vmatrix} x & y & z \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \\ r_1 - p_1 & r_2 - p_2 & r_3 - p_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \\ r_1 - p_1 & r_2 - p_2 & r_3 - p_3 \end{vmatrix} &= 0.
\end{aligned}$$

Tason yhtälö on

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \\ r_1 - p_1 & r_2 - p_2 & r_3 - p_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \\ r_1 - p_1 & r_2 - p_2 & r_3 - p_3 \end{vmatrix} = 0$$

eli

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \\ r_1 - p_1 & r_2 - p_2 & r_3 - p_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \\ r_1 - p_1 & r_2 - p_2 & r_3 - p_3 \end{vmatrix}.$$

□

Saatiin johdettua tason yhtälö

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \\ r_1 - p_1 & r_2 - p_2 & r_3 - p_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \\ r_1 - p_1 & r_2 - p_2 & r_3 - p_3 \end{vmatrix}.$$

Oikeaa puolta voi vielä vähän sieventää.

Huomautus 5.2

Determinantin laskusääntöjen perusteella saatu pisteiden p, q, r kautta kulkevan tason yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \\ r_1 - p_1 & r_2 - p_2 & r_3 - p_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}.$$

Huomautus 5.3

Saatu tason yhtälö voidaan tarkastaa sijoittamalla pisteet p, q, r vuoron perään yhtälöön. Yhtälö on

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \\ r_1 - p_1 & r_2 - p_2 & r_3 - p_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \\ r_1 - p_1 & r_2 - p_2 & r_3 - p_3 \end{vmatrix}.$$

Sijoittamalla $(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3)$ saadaan

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \\ r_1 - p_1 & r_2 - p_2 & r_3 - p_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \\ r_1 - p_1 & r_2 - p_2 & r_3 - p_3 \end{vmatrix},$$

mikä on selvästi totta.

Huomautus 5.4

Sijoittamalla $(x, y, z) = (q_1, q_2, q_3)$ saadaan

$$\begin{vmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \\ r_1 - p_1 & r_2 - p_2 & r_3 - p_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \\ r_1 - p_1 & r_2 - p_2 & r_3 - p_3 \end{vmatrix},$$

ja siirtämällä oikean puolen termi vasemmalle saadaan

$$\begin{vmatrix} q_1 - p_1 & q_2 - p_1 & q_3 - p_1 \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \\ r_1 - p_1 & r_2 - p_2 & r_3 - p_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Koska saadussa determinantissa on kaksi identtistä riviä, determinantin arvo on nolla. Siis piste q toteuttaa johdetun yhtälön.

Vastaavasti piste r toteuttaa johdetun yhtälön.

Tason yhtälö determinantin avulla lausuttuna

Huomautus 5.5

Olkoon tason parametriesitys

$$p + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}.$$

Tällöin tason yhtälö on

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Esimerkki 5.6

Tason

$$(1,0,7) + t(2,4,0) + s(-2,2,3), \quad t,s \in \mathbb{R},$$

yhtälö on

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$