

# Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,  
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF  
EASTERN FINLAND

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä (eivät saa olla samalla suoralla)
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria (eivät saa olla yhdensuuntaisia)
- (iii) tason piste ja tason normaali  $\mathbf{n} = (a, b, c)$  (ei saa olla  $a = b = c = 0$ )
- (iv) tason yhtälö  $ax + by + cz = d$  (ei saa olla  $a = b = c = 0$ )

Tiedot (i)–(iv) ovat siinä järjestyksessä että, jos yksi tiedetään, seuraava on helppo johtaa. On siis helppoa edetä (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Rightarrow$  (iv).

## Esimerkki 5.1 (tiedosta (i) tieto (ii))

Taso kulkee pisteiden  $p = (1, 1, 1)$ ,  $q = (2, 4, 4)$  ja  $r = (6, 0, 0)$  kautta. Miten löydetään tasolle kaksi suuntavektoria?

Eräs suuntavektori on  $\mathbf{u} = q - p = (2, 4, 4) - (1, 1, 1) = (1, 3, 3)$ .

Toinen suuntavektori on  $\mathbf{v} = r - p = (6, 0, 0) - (1, 1, 1) = (5, -1, -1)$ .

Kyseessä on taso, joka kulkee pisteen  $p = (1, 1, 1)$  kautta ja jolla on suuntavektorit  $\mathbf{u} = (1, 3, 3)$  ja  $\mathbf{v} = (5, -1, -1)$ .

## Lause 5.2

*Tasosta tiedetään jokin seuraavista ehdoista.*

- (i) tason kolme pistettä (eivät ole samalla suoralla),*
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria (eivät ole yhdensuuntaisia),*
- (iii) tason piste ja tason normaali  $\mathbf{n} = (a, b, c)$  (ei päde  $a = b = c = 0$ ),*
- (iv) tason yhtälö  $ax + by + cz = d$  (ei päde  $a = b = c = 0$ ).*

*Tällöin voidaan tehdä johdot (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Rightarrow$  (iv).*

**Todistus.** [(i)] Oletetaan, että tasossa on pisteet  $p, q, r$ , jotka eivät ole samalla suoralla.

[(i)  $\Rightarrow$  (ii)] Valitsemalla  $\mathbf{u} = q - p$  ja  $\mathbf{v} = r - p$ , saadaan tasolle esitys

$$p + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

[(ii)  $\Rightarrow$  (iii)] Valitsemalla normaaliksi  $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ , saadaan tason yhtälöksi

$$(X - p) \cdot \mathbf{n} = 0,$$

missä  $X = (x, y, z)$ .

[(iii)  $\Rightarrow$  (iv)] Asettamalla  $p = (x_0, y_0, z_0)$  ja  $\mathbf{n} = (a, b, c)$ , yhtälö on

$$\begin{aligned}(X - p) \cdot \mathbf{n} &= ((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) \cdot (a, b, c) \\ &= (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0,\end{aligned}$$

eli

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

**Tiedetään** (i) tason kolme pistettä

**Halutaan** (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria

## Esimerkki 5.3

Taso kulkee pisteiden  $(1, 2, 3)$ ,  $(2, 1, 4)$  ja  $(-3, 2, 2)$  kautta. Esitetään taso parametrimuodossa.

Suuntavektoreiksi voidaan valita

$$\mathbf{u} = (2, 1, 4) - (1, 2, 3) = (1, -1, 1)$$

ja

$$\mathbf{v} = (-3, 2, 2) - (1, 2, 3) = (-4, 0, -1).$$

Selvästi  $\mathbf{u}$  ja  $\mathbf{v}$  eivät ole yhdensuuntaisia.

Tason parametriesitys on

$$(2, 1, 4) + s(1, -1, 1) + t(-4, 0, -1), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

**Tiedetään** (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria

**Halutaan** (iii) tason piste ja tason normaali  $\mathbf{n} = (a, b, c)$

## Esimerkki 5.4

Taso kulkee pisteen  $(1, 1, 2)$  kautta ja tasolla on suuntavektorit  $(1, 0, 3)$  ja  $(2, -1, -1)$ . Etsitään tason normaali sekä tason yhtälö.

Normaaliksi voidaan valita

$$\mathbf{n} = (1, 0, 3) \times (2, -1, -1) = (3, 7, -1).$$

Siis kyseessä on se yksikäsitteinen taso, joka kulkee pisteen  $(1, 0, 3)$  kautta ja jolla on normaalina  $(3, 7, -1)$ .

Siis tason yhtälö on muotoa

$$((x, y, z) - (1, 1, 2)) \cdot (3, 7, -1) = 0.$$

**Tiedetään** (iii) tason piste ja tason normaali  $\mathbf{n} = (a, b, c)$

**Halutaan** (iv) tason yhtälö  $ax + by + cz = d$

Esimerkki 5.5 (jatkoa edelliselle esimerkille)

Taso kulkee pisteen  $(1, 1, 2)$  kautta ja sillä on normaalina  $(3, 7, -1)$ .

Siis tason yhtälö on

$$\begin{aligned} & ((x, y, z) - (1, 1, 2)) \cdot (3, 7, -1) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x - 1, y - 1, z - 2) \cdot (3, 7, -1) = 0 \\ \Leftrightarrow & 3(x - 1) + 7(y - 1) - (z - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow & 3x - 3 + 7y - 7 - z + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow & 3x + 7y - z = 8. \end{aligned}$$