Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali

UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Tason esitystapoja, yhtälöstä pisteisiin

Taso tunnetaan, jos tiedetään

(i) tason kolme pistettä (eivät saa olla samalla suoralla)

(ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria (eivät saa olla yhdensuuntaisia)

(iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)

(iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)

Tiedot (i)–(iv) ovat siinä järjestyksessä että, jos yksi tiedetään, seuraava on helppo johtaa. On siis helppoa edetä (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv).
Mutta, kuinka voidaan edetä toiseen suuntaan (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i)?

Tason esitystapoja, yhtälöstä pisteisiin

Tiedetään (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$

Halutaan (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$

Lause 5.1

Tason $ax + by + cz = d$, missä ei päde $a = b = c = 0$, normaali on $\mathbf{n} = (a, b, c)$. Lisäksi piste

$$(ad, bd, cd)T, \quad \textit{missä} \quad T = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$$

kuuluu tasoon.

Todistus.Oletetaan, että $d \neq 0$. Tasoilla

$$ax + by + cz = d, \quad ax + by + cz = 0$$

ei ole yhteisiä pisteitä. Nimittäin, jos (x_0, y_0, z_0) kuuluisi kumpaankin tasoon, saataisiin

$$d = ax_0 + by_0 + cz_0 = 0,$$

mikä on ristiriita. Siis mainitut tasot

$$ax + by + cz = d, \quad ax + by + cz = 0$$

ovat yhdensuuntaisia. Siis niiden normaalit ovat yhdensuuntaisia.

Tason esitystapoja, yhtälöstä pisteisiin

Tulee siis osoittaa, että tason $ax + by + cz = 0$ eräs normaali on $\mathbf{n} = (a, b, c)$. Selvästi $p = (0, 0, 0)$ kuuluu tasoon. Siis

$$\begin{aligned} & ax + by + cz && = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & a(x - p_1) + b(y - p_2) + c(z - p_3) = && = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x - p_1, y - p_2, z - p_3) \cdot (a, b, c) && = 0. \end{aligned}$$

Selvästi (a, b, c) on tason normaali.

Halutaan osoittaa, että piste

$$(ad, bd, cd)T, \quad \text{missä} \quad T = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2},$$

kuuluu tasoon $ax + by + cz = d$. Sijoittamalla saadaan

$$\begin{aligned} & a(adT) + b(bdT) + c(cdT) &= d \\ \Leftrightarrow \quad & (a^2 + b^2 + c^2)dT &= d \\ \Leftrightarrow \quad & \tfrac{(a^2+b^2+c^2)d}{a^2+b^2+c^2} &= d, \end{aligned}$$

mikä on selvästi totta. $\square$

UNIVERSITY OF EASTERN FINLAND

Huomautus 5.2

Nähtiin, että piste

$$(ad, bd, cd)T, \quad \text{missä} \quad T = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2},$$

kuuluu aina tasoon $ax + by + cz = d$. Piste on muotoa

$$(ad, bd, cd)T = (a, b, c)dT = (0, 0, 0) + t(a, b, c),$$

missä $t = dT$. Siis piste on origon kautta kulkevalla tason normaalisuoralla

$$(0, 0, 0) + t(a, b, c), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Siis tason $ax + by + cz = d$ origoa lähin piste on

$$(ad, bd, cd)T, \quad \text{missä} \quad T = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Tason esitystapoja, yhtälöstä pisteisiin

Seuraus 5.3

Tason $ax + by + cz = d$ origoa lähin piste on

$$(ad, bd, cd)T, \quad \textit{missä} \quad T = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Esimerkki 5.4

Tason $ax + by + cz = 0$ origoa lähin piste on

$$(a \cdot 0, b \cdot 0, c \cdot 0)T = (0, 0, 0).$$

Esimerkki 5.5

Tason $2x - 3y + 5z = 7$ origoa lähin piste on

$$(2 \cdot 7, -3 \cdot 7, 5 \cdot 3)\frac{1}{2^2 + (-3)^2 + 5^2} = \frac{1}{38}(14, -21, 35) = \left(\frac{14}{38}, -\frac{21}{38}, \frac{35}{38}\right).$$

UNIVERSITY OF EASTERN FINLAND

Esimerkki 5.6

Tason $x - y + 2z = 7$ eräs normaali on $\mathbf{n} = (1, -1, 2)$. Nyt $|\mathbf{n}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$ ja $T = \frac{1}{|\mathbf{n}|^2} = \frac{1}{6}$. Nyt piste

$$(ad, bd, cd)T = \frac{1}{6}(7, -7, 14) = \left(\frac{7}{6}, -\frac{7}{6}, \frac{14}{6}\right).$$

on annetussa tasossa.

Tarkistus. Sijoitetaan

$$(x, y, z) = \left(\frac{7}{6}, -\frac{7}{6}, \frac{14}{6}\right)$$

lausekkeeseen $x - y + 2z$, jolloin saadaan

$$x - y + 2z = \frac{7}{6} + (-1)\frac{7}{6} + 2\frac{14}{6} = \frac{7 + 7 + 28}{6} = \frac{42}{6} = 7.$$

Siis piste $\left(\frac{7}{6}, -\frac{7}{6}, \frac{14}{6}\right)$ on tasossa $x - y + 2z = 7$.

Tiedetään (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$

Halutaan (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria

Esimerkki 5.7

Pisteen $(1, 2, 2)$ kautta kulkevan tason normaali on $\mathbf{n} = (1, 0, -1)$. Halutaan esittää taso muodossa

$$(1, 2, 2) + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Täytyy siis löytää vain jotkut vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$, joille $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ ja $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$. Huomataan, että voidaan valita $\mathbf{u} = (0, 1, 0)$ ja $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$. Tason parametriesitys on

$$(1, 2, 2) + t(0, 1, 0) + s(1, 0, 1), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Voitaisiin myös valita $\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{n}$.

Tiedetään (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$

Halutaan (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria

Esimerkki 5.8

Pisteen (p_1, p_2) kautta kulkevan, vektoria (a, b) vastaan kohtisuoran suoran parametriesitys on

$$(p_1, p_2) + t(b, -a), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nyt vektoria (b, a) vastaan kohtisuora vektori $(b, -a)$ löydettiin "arvaamalla".

Voitaisiinko vektoria (a, b, c) vastaan kohtisuora vektori löytää arvaamalla? Eräs tällainen vektori olisi $\mathbf{u} = (bc, ac, -2ab)$. Mutta jos $(a, b, c) = (1, 0, 0)$, niin $\mathbf{u} = (0, 0, 0)$, mikä ei kiinnosta. Koska vektoria $\mathbf{u}$ halutaan suuntavektorina, vektori $\mathbf{u}$ ei saa olla nollavektori.

Tason esitystapoja, yhtälöstä pisteisiin

Tiedetään (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$

Halutaan (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria

Lause 5.9

Tason $(a, b, c)((x, y, z) - p)$ suuntavektoreiksi voidaan valita kaksi vektoreista

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= (b - c, c - a, a - b) \\
\mathbf{u}_2 &= (c - b, c + a, -(a + b)) \\
\mathbf{u}_3 &= (-(b + c), a - c, a + b) \\
\mathbf{u}_4 &= (b + c, -(a + c), b - a).
\end{aligned}$$

Siis vektoreista $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_4$ löytyy kaksi ei-yhdensuuntaista ei-nollavektoria.

Todistus.

Nähdään, että ehdosta $\mathbf{u}_j = t\mathbf{u}_k$, $j \neq k$, seuraa $t = \pm 1$. Ehdosta $\mathbf{u}_j = t\mathbf{u}_k = s\mathbf{u}_l$, missä $t = \pm 1$, $s = \pm 1$, seuraa $a = b = c = 0$, mikä on ristiriita. $\square$

Tiedetään (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria

Halutaan (i) tason kolme pistettä

Lause 5.10

Tason

$$p + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

kolme pistettä p, q, r *voidaan valita* $q = p + \mathbf{u}$ *ja* $r = p + \mathbf{v}$*. Tällöin* p, q, r *eivät ole samalla suoralla.*

Todistus.

Ohitetaan. □

Tason esitystapoja, yhtälöstä pisteisiin

UNIVERSITY OF EASTERN FINLAND

Taso tunnetaan, jos tiedetään

(i) tason kolme pistettä (eivät saa olla samalla suoralla)

(ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria (eivät saa olla yhdensuuntaisia)

(iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)

(iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)

Tiedot (i)–(iv) ovat siinä järjestyksessä että, jos yksi tiedetään, seuraava on helppo johtaa. On siis helppoa edetä (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv).
Edellisten lauseiden perusteella, voidaan aina edetä (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i).
Yleisten kaavojen johtaminen on hankalaa.