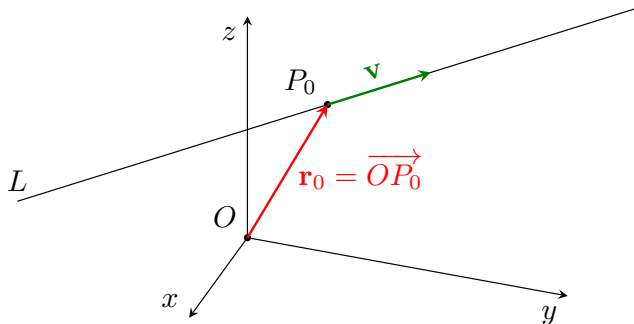


Vektorilaskenta

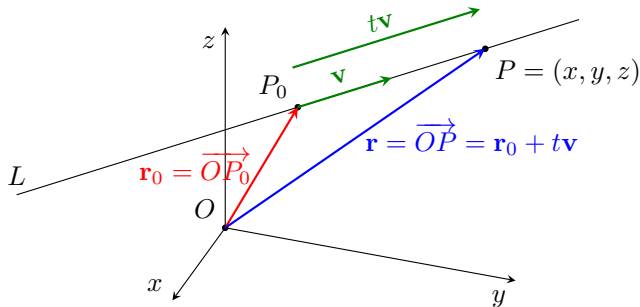
Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND



Olkoon L suora, joka kulkee pisteen $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ kautta ja on vektorin $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ suuntainen. Olkoon piste $O = (0, 0, 0)$ origo.



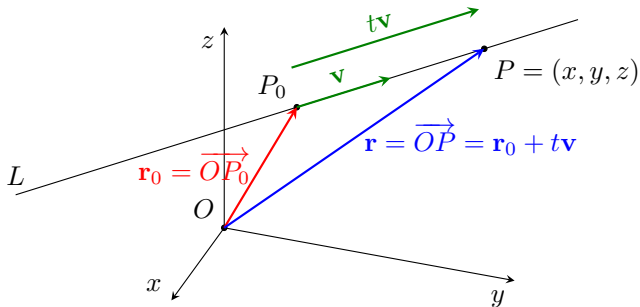
Piste

$P = (x, y, z)$ kuuluu suoralle L , jos ja vain jos on olemassa sellainen $t \in \mathbb{R}$, että

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\mathbf{v}.$$

Merkitään $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$ ja $\overrightarrow{OP_0} = \mathbf{r}_0$, jolloin saadaan

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}.$$



Määritelmä 5.1

Pisteen P_0 kautta kulkevan, vektorin $\mathbf{v}$ suuntaisen suoran [parametriesitys vektorimuodossa](#) on

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tässä $\mathbf{r}_0$ on pisteen P_0 paikkavektori.

Siis

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v},$$

mihin voidaan sijoittaa

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}.$$

Saadaan

$$\begin{aligned} x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} &= x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k} + t(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}) \\ \Leftrightarrow x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} &= (x_0 + ta)\mathbf{i} + (y_0 + tb)\mathbf{j} + (z_0 + tc)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Vektorit ovat samat, jos niiden komponentit ovat yhtä suuret. Saadaan siis

$$\begin{cases} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt, \\ z &= z_0 + ct \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Määritelmä 5.2

Pisteen P_0 kautta kulkevan, vektorin $\mathbf{v}$ suuntaisen suoran **parametriesitys vektorimuodossa** on

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tässä $\mathbf{r}_0$ on pisteen P_0 paikkavektori, $\mathbf{v}$ on suoran **suuntavektori** ja t on **parametri**.

Määritelmä 5.3

Pisteen P_0 kautta kulkevan, vektorin $\mathbf{v}$ suuntaisen suoran **parametriesitys koordinaattimuodossa** on

$$\begin{cases} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tässä $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ja $\mathbf{v} = (a, b, c)$ ja a, b, c ovat suoran **suuntaluvut**.

Esimerkki 5.4

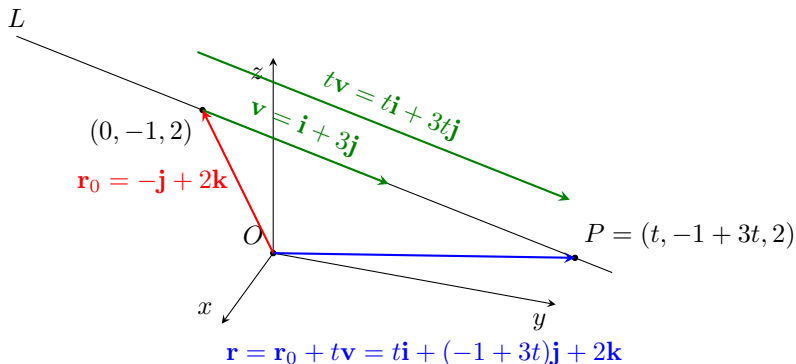
Määritetään pisteen $P_0 = (0, -1, 2)$ kautta kulkevan vektorin $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ suuntaisen suoran parametriesitys sekä vektorimuodossa että koordinaattimuodossa.

Merkitään $\mathbf{r}_0 = -\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Suoran parametriesitys vektorimuodossa on

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \\ &= (-\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) + t(\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \\ &= t\mathbf{i} + (-1 + 3t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Edelleen suoran parametriesitys koordinaattimuodossa on

$$\begin{cases} x = 0 + 1 \cdot t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 + 0 \cdot t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$



Esimerkin suora $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + (-1 + 3t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ avaruudessa $\mathbb{R}^3$.

Esimerkki 5.5

Suoran parametriesitys koordinaattimuodossa on

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 3t, \\ z = 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Mitä pisteitä suoralle kuuluu?

Esimerkiksi piste $(0, -1, 2)$ on suoran piste, sillä sijoittamalla $x = 0$, $y = -1$ ja $z = 2$ sekä valitsemalla $t = 0$, kaikki koordinaattimuotoiset yhtälöt toteutuvat.

Sen sijaan esimerkiksi piste $(0, 0, 0)$ ei ole suoran piste, sillä olipa t mikä tahansa reaaliluku, niin yhtälö $z = 2$ ei toteudu, kun sijoitetaan $x = y = z = 0$.

Esimerkki 5.6

Suoran parametriesitys koordinaattimuodossa on

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= -1 + 3t, \\ z &= 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Voidaanko suoralle kirjoittaa yhtälö?

Joka tapauksessa $z = 2$ riippumatta parametrilla t .

Lisäksi $x = t$ ja $y = -1 + 3t$ samalla parametrilla t arvolla. Tästä löydetään yhteys pisteille x ja y . Ratkaistaan parametri t kummastakin yhtälöstä, jolloin saadaan $t = x$ ja $t = \frac{y+1}{3}$. Suoran **yhtälö normaalimuodossa** on

$$z = 2 \quad \wedge \quad x = \frac{y+1}{3}.$$

Kyseessä on tasojen $z = 2$ ja $x = \frac{y+1}{3}$ leikkaussuora.

Esimerkki 5.7

Suoran parametriesitys koordinaattimuodossa on

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Kyseessä on erikoistapaus, jossa suora on x -akselin suuntainen. Parametrille t on vain yksi esitystapa, joten mitään parametrista t riippuvaa ei voida asettaa yhtä suuriksi. Suoran yhtälö normaalimuodossa on

$$y = 2 \quad \wedge \quad z = 3.$$

Esimerkki 5.8

Olkoot $a, b, c \neq 0$. Suoran parametriesitys koordinaattimuodossa on

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{x-x_0}{a} = t \\ \frac{y-y_0}{b} = t \\ \frac{z-z_0}{c} = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

Asettamalla parametrin t esitystavat yhtä suuriksi, saadaan suoran yhtälöksi normaalimuodossa

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Esimerkki 5.9

Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tarkastellaan suoraa $(x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$, $t \in \mathbb{R}$.

Jos $a, b, c \neq 0$, niin

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Jos $a = 0$ ja $b, c \neq 0$, niin

$$x = x_0 \quad \wedge \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Jos $a = b = 0$ ja $c \neq 0$, niin

$$x = x_0 \quad \wedge \quad y = y_0.$$

Jos $a = b = c = 0$, eli suoran suuntavektori on nollavektori, niin kyseessä ei ole suora vaan pelkästään yksi piste (x_0, y_0, z_0) .

Määritelmä 5.10

Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}$, missä (a, b, c) ei ole nollavektori. Tarkastellaan suoraa $(x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$, $t \in \mathbb{R}$.

Muotoa

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

ja

$$x = x_0 \quad \wedge \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

ja

$$x = x_0 \quad \wedge \quad y = y_0$$

olevia yhtälöitä kutsutaan suoran **yhtälöksi normaalimuodossa**.