

Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Esimerkki 5.1

Tasot T_1 ja T_2 , joiden yhtälöt ovat

$$T_1: \quad x + 2y + 3z = 7$$

$$T_2: \quad 2x + 4y + 6z = 16$$

eivät leikkaa. Nimittäin jälkimmäinen yhtälö voidaan jakaa puolittain luvulla 2 ja saadaan

$$T_1: \quad x + 2y + 3z = 7$$

$$T_2: \quad x + 2y + 3z = 8.$$

Jos tasoilla olisi yhteinen leikkauspiste (x_0, y_0, z_0) , niin pätisi

$$7 = x_0 + 2y_0 + 3z_0 = 8,$$

mikä on mahdotonta. Tasot ovat siis yhdensuuntaisia.

Esimerkki 5.2

Tasot T_1 ja T_2 , joiden yhtälöt ovat

$$T_1 : \quad x + 2y + 3z = 7$$

$$T_2 : \quad 2x + 4y + 6z = 16$$

eivät leikkaa. Nimittäin tasojen eräät normaalit ovat $\mathbf{n}_1 = (1, 2, 3)$ ja $\mathbf{n}_2 = (2, 4, 6)$. Nähdään, että $\mathbf{n}_1 = t\mathbf{n}_2$ jollakin $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, eli tasojen normaalit ovat yhdensuuntaiset. (Ekvivalentisti $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{0}$.) Siis tasot ovat yhdensuuntaiset.

Kuva yhdensuuntaisista tasoista tähän.

Esimerkki 5.3

Tasot T_1 ja T_2 , joiden yhtälöt ovat

$$T_1 : x - y = 3$$

$$T_2 : x + y + z = 0$$

leikkaavat. Tämä voidaan nähdä monella eri tavalla.

Nähdään, että piste $(4, 1, -5)$ toteuttaa molempien tasojen yhtälöt. Siis ainakin yksi leikkauspiste on olemassa. Leikkauspisteitä täytyy toki olla enemmänkin.

Tasojen yhtälö esittävät selvästi ei-yhdensuuntaisia tasoja. Toista ei saada toisesta kertomalla vakiolla.

Kuva leikkaavista tasoista tähän.

Esimerkki 5.4

Tasot T_1 ja T_2 , joiden yhtälöt ovat

$$T_1 : x - y = 3$$

$$T_2 : x + y + z = 0$$

leikkaavat. Tämä voidaan nähdä monella eri tavalla.

Tasojen normaalit $\mathbf{n}_1 = (1, -1, 0)$ ja $\mathbf{n}_2 = (1, 1, 1)$ eivät ole yhdensuuntaisia. Vektori $t\mathbf{n}_1 = (t, -t, 0) \neq (1, 1, 1)$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$, koska kolmannet komponentit eivät ole samat.

Normaalit $\mathbf{n}_1$ ja $\mathbf{n}_2$ eivät ole yhdensuuntaisia myöskään siitä syystä, että

$$\mathbf{u} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (1, -1, 0) \times (1, 1, 1) = (-1, -1, 2) \neq \mathbf{0}.$$

Kuva leikkaavista tasoista tähän.

Esimerkki 5.5

Tarkastellaan tasoja T_1 ja T_2 , joiden yhtälöt ovat

$$\begin{aligned}T_1 : \quad x - y &= 3 \\T_2 : \quad x + y + z &= 0.\end{aligned}$$

Koska normaalit $\mathbf{n}_1 = (1, -1, 0)$ ja $\mathbf{n}_2 = (1, 1, 1)$ eivät ole yhdensuuntaisia, tasoilla on yhteinen leikkaussuora. Leikkaussuora on kummankin tason suuntainen ja sen vuoksi sen suuntavektori on kohtisuorassa vektoreita $\mathbf{n}_1$ ja $\mathbf{n}_2$ vastaan. Siis suuntavektoriksi voidaan valita ristitulo

$$\mathbf{u} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (1, -1, 0) \times (1, 1, 1) = (-1, -1, 2).$$

Piste $(4, 1, -5)$ toteuttaa molempien tasojen yhtälöt ja kuuluu siis tasojen leikkaussuoralle. Tasojen leikkaussuoran parametriesitykseksi saadaan

$$\mathbf{r} = (4, 1, -5) + t(-1, -1, 2).$$

Kuva tasoista ja leikkaussuorasta tähän.