

# Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,  
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF  
EASTERN FINLAND

## Määritelmä 5.1

Olkoot  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  ja  $\mathbf{w}$  avaruuden  $\mathbb{R}^3$  vektoreita. Vektorien  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  määräämä **vektoriolmitulo** on  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ .

## Lause 5.2

*Olkoot  $\mathbf{u}$  ja  $\mathbf{v}$  avaruuden  $\mathbb{R}^3$  vektoreita ja  $\theta$  niiden välinen kulma. Tällöin*

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$$

*on vektorien  $\mathbf{u}$  ja  $\mathbf{v}$  virittämän suunnikkaan pinta-ala.*

## Todistus 5.3

Vektorit  $\mathbf{u}$  ja  $\mathbf{v}$  voidaan siirtää  $xy$ -tasoon ja kiertää siten, että molempien lähtöpiste sijaitsee origossa, vektorin  $\mathbf{u}$  loppupiste sijaitsee positiivisella  $x$ -akselilla ja vektorin  $\mathbf{v}$  loppupiste sijaitsee  $xy$ -tason sillä puoliskolla, jossa  $y$ -koordinaatti on positiivinen.

**Kuva tähän.**

## Todistus 5.3

Vektorit  $\mathbf{u}$  ja  $\mathbf{v}$  voidaan siirtää  $xy$ -tasoon ja kiertää siten, että molempien lähtöpiste sijaitsee origossa, vektorin  $\mathbf{u}$  loppupiste sijaitsee positiivisella  $x$ -akselilla ja vektorin  $\mathbf{v}$  loppupiste sijaitsee  $xy$ -tason sillä puoliskolla, jossa  $y$ -koordinaatti on positiivinen.

**Kuva tähän.** Siis

$$\mathbf{u} = x_1 \mathbf{i}$$

$$\mathbf{v} = x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j}.$$

Suunnikkaan kärjet ovat nyt  $(0, 0)$ ,  $(x_1, 0)$ ,  $(x_1 + x_2, y_2)$  ja  $(x_2, y_2)$ . Selvästi suunnikkaan kanta on  $x_1$  ja korkeus on  $y_2$ . Siis pinta-ala on  $A = x_1 y_2$ .

## Todistus 5.3

Vektorit  $\mathbf{u}$  ja  $\mathbf{v}$  voidaan siirtää  $xy$ -tasoon ja kiertää siten, että molempien lähtöpiste sijaitsee origossa, vektorin  $\mathbf{u}$  loppupiste sijaitsee positiivisella  $x$ -akselilla ja vektorin  $\mathbf{v}$  loppupiste sijaitsee  $xy$ -tason sillä puoliskolla, jossa  $y$ -koordinaatti on positiivinen.

**Kuva tähän.** Siis

$$\mathbf{u} = x_1 \mathbf{i}$$

$$\mathbf{v} = x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j}.$$

Suunnikkaan kärjet ovat nyt  $(0, 0)$ ,  $(x_1, 0)$ ,  $(x_1 + x_2, y_2)$  ja  $(x_2, y_2)$ . Selvästi suunnikkaan kanta on  $x_1$  ja korkeus on  $y_2$ . Siis pinta-ala on  $A = x_1 y_2$ .

Toisaalta  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = x_1 y_2 \mathbf{k}$ .

## Todistus 5.3

Vektorit  $\mathbf{u}$  ja  $\mathbf{v}$  voidaan siirtää  $xy$ -tasoon ja kiertää siten, että molempien lähtöpiste sijaitsee origossa, vektorin  $\mathbf{u}$  loppupiste sijaitsee positiivisella  $x$ -akselilla ja vektorin  $\mathbf{v}$  loppupiste sijaitsee  $xy$ -tason sillä puoliskolla, jossa  $y$ -koordinaatti on positiivinen.

**Kuva tähän.** Siis

$$\mathbf{u} = x_1 \mathbf{i}$$

$$\mathbf{v} = x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j}.$$

Suunnikkaan kärjet ovat nyt  $(0, 0)$ ,  $(x_1, 0)$ ,  $(x_1 + x_2, y_2)$  ja  $(x_2, y_2)$ . Selvästi suunnikkaan kanta on  $x_1$  ja korkeus on  $y_2$ . Siis pinta-ala on  $A = x_1 y_2$ .

Toisaalta  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = x_1 y_2 \mathbf{k}$ .

Siis  $A = x_1 y_2 = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ .

## Todistus 5.3

Vektorit  $\mathbf{u}$  ja  $\mathbf{v}$  voidaan siirtää  $xy$ -tasoon ja kiertää siten, että molempien lähtöpiste sijaitsee origossa, vektorin  $\mathbf{u}$  loppupiste sijaitsee positiivisella  $x$ -akselilla ja vektorin  $\mathbf{v}$  loppupiste sijaitsee  $xy$ -tason sillä puoliskolla, jossa  $y$ -koordinaatti on positiivinen.

**Kuva tähän.** Siis

$$\mathbf{u} = x_1 \mathbf{i}$$

$$\mathbf{v} = x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j}.$$

Suunnikkaan kärjet ovat nyt  $(0, 0)$ ,  $(x_1, 0)$ ,  $(x_1 + x_2, y_2)$  ja  $(x_2, y_2)$ . Selvästi suunnikkaan kanta on  $x_1$  ja korkeus on  $y_2$ . Siis pinta-ala on  $A = x_1 y_2$ .

Toisaalta  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = x_1 y_2 \mathbf{k}$ .

Siis  $A = x_1 y_2 = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ .



## Määritelmä 5.4

Olkoot  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  ja  $\mathbf{w}$  avaruuden  $\mathbb{R}^3$  vektoreita. Vektorien  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  määräämä **vektorikolmitulo** on  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ .

## Lause 5.5

*Olkoot  $\mathbf{u}$  ja  $\mathbf{v}$  avaruuden  $\mathbb{R}^3$  vektoreita ja  $\theta$  niiden välinen kulma. Olkoon lisäksi  $\mathbf{w}$  avaruuden  $\mathbb{R}^3$  vektori ja  $\alpha$  vektorien  $\mathbf{w}$  ja  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  välinen kulma. Tällöin*

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \sin \theta \cos \alpha$$

*on vektorien  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  ja  $\mathbf{w}$  virittämän suuntaissärmiön tilavuus.*

## Todistus 5.6

Yksinkertaistetaan tilannetta siirtämällä ja kiertämällä kuten edellisessä lauseessa. Voidaan siis olettaa, että

**Kuva tähän.**

## Todistus 5.6

Yksinkertaistetaan tilannetta siirtämällä ja kiertämällä kuten edellisessä lauseessa. Voidaan siis olettaa, että

**Kuva tähän.** Siis

$$\mathbf{u} = x_1 \mathbf{i}$$

$$\mathbf{v} = x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{w} = x_3 \mathbf{i} + y_3 \mathbf{j} + z_3 \mathbf{k}.$$

Nyt  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = x_1 y_2 \mathbf{k}$ . Edelleen  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = x_1 y_2 z_3$ .

## Todistus 5.7

Nyt  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = x_1 y_2 \mathbf{k}$ . Edelleen  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = x_1 y_2 z_3$ . Tässä  $x_1 y_2$  on suuntaissärmiön pohjan ala ja  $z_3$  on suuntaissärmiön korkeus.

## Todistus 5.7

Nyt  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = x_1 y_2 \mathbf{k}$ . Edelleen  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = x_1 y_2 z_3$ . Tässä  $x_1 y_2$  on suuntaissärmiön pohjan ala ja  $z_3$  on suuntaissärmiön korkeus.

Leikkaamalla suuntaissärmiö  $xy$ -tason suuntaiseksi siivuiksi, voidaan siivut siirtää päällekkäin, jolloin syntyy pysty särmiö.

## Todistus 5.7

Nyt  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = x_1 y_2 \mathbf{k}$ . Edelleen  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = x_1 y_2 z_3$ . Tässä  $x_1 y_2$  on suuntaissärmiön pohjan ala ja  $z_3$  on suuntaissärmiön korkeus.

Leikkaamalla suuntaissärmiö  $xy$ -tason suuntaiseksi siivuiksi, voidaan siivut siirtää päällekkäin, jolloin syntyy pysty särmiö.

Edelleen leikkaamalla syntynyt särmiö  $yz$ -tason suuntaiseksi siivuiksi, voidaan siivut siirtää vierekkäin, jolloin syntyy suorakulmainen särmiö.

## Todistus 5.7

Nyt  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = x_1 y_2 \mathbf{k}$ . Edelleen  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = x_1 y_2 z_3$ . Tässä  $x_1 y_2$  on suuntaissärmiön pohjan ala ja  $z_3$  on suuntaissärmiön korkeus.

Leikkaamalla suuntaissärmiö  $xy$ -tason suuntaiseksi siivuiksi, voidaan siivut siirtää päällekkäin, jolloin syntyy pysty särmiö.

Edelleen leikkaamalla syntynyt särmiö  $yz$ -tason suuntaiseksi siivuiksi, voidaan siivut siirtää vierekkäin, jolloin syntyy suorakulmainen särmiö.

Suorakulmaisen särmiön pituus, leveys ja korkeus ovat  $x_1$ ,  $y_2$  ja  $z_3$ . Siis särmiön tilavuus  $V = x_1 y_2 z_3 = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ .

## Todistus 5.7

Nyt  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = x_1 y_2 \mathbf{k}$ . Edelleen  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = x_1 y_2 z_3$ . Tässä  $x_1 y_2$  on suuntaissärmiön pohjan ala ja  $z_3$  on suuntaissärmiön korkeus.

Leikkaamalla suuntaissärmiö  $xy$ -tason suuntaiseksi siivuiksi, voidaan siivut siirtää päällekkäin, jolloin syntyy pysty särmiö.

Edelleen leikkaamalla syntynyt särmiö  $yz$ -tason suuntaiseksi siivuiksi, voidaan siivut siirtää vierekkäin, jolloin syntyy suorakulmainen särmiö.

Suorakulmaisen särmiön pituus, leveys ja korkeus ovat  $x_1$ ,  $y_2$  ja  $z_3$ . Siis särmiön tilavuus  $V = x_1 y_2 z_3 = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ .

