

Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Määritelmä 5.1

Olkoot $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita. Vektorien $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ määräämä **vektoriolmitulo** on $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$.

Lause 5.2

Olkoot $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita ja θ niiden välinen kulma. Tällöin

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$$

on vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ virittämän suunnikkaan pinta-ala.

Huomautus 5.3

Jos $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, eli $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat kohtisuorassa, niin $\sin \theta = \sin \frac{\pi}{2} = 1$. Tällöin

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$$

on vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ virittämän **suorakulmion** pinta-ala.

Esimerkki 5.4

Tarkastellaan kolmiota ABC , missä $A = (1, 1, 0)$, $B = (3, 0, 2)$ ja $C = (0, -1, 1)$. Lasketaan kolmion ala.

Kolmion kaksi sivua ovat vektoreiden $\mathbf{u} = B - A = (2, -1, 0)$ ja $\mathbf{v} = C - A = (-1, -2, 1)$ suuntaisia. Vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ virittämän suunnikkaan pinta-ala on $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$. Kolmion pinta-ala on puolet tästä, eli $A = \frac{1}{2}|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$.

$$A = \frac{1}{2}|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$$

Esimerkki 5.4

Tarkastellaan kolmiota ABC , missä $A = (1, 1, 0)$, $B = (3, 0, 2)$ ja $C = (0, -1, 1)$. Lasketaan kolmion ala.

Kolmion kaksi sivua ovat vektoreiden $\mathbf{u} = B - A = (2, -1, 0)$ ja $\mathbf{v} = C - A = (-1, -2, 1)$ suuntaisia. Vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ virittämän suunnikkaan pinta-ala on $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$. Kolmion pinta-ala on puolet tästä, eli $A = \frac{1}{2}|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \\ &= \frac{1}{2} |(2, -1, 0) \times (-1, -2, 1)| \end{aligned}$$

Esimerkki 5.4

Tarkastellaan kolmiota ABC , missä $A = (1, 1, 0)$, $B = (3, 0, 2)$ ja $C = (0, -1, 1)$. Lasketaan kolmion ala.

Kolmion kaksi sivua ovat vektoreiden $\mathbf{u} = B - A = (2, -1, 0)$ ja $\mathbf{v} = C - A = (-1, -2, 1)$ suuntaisia. Vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ virittämän suunnikkaan pinta-ala on $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$. Kolmion pinta-ala on puolet tästä, eli $A = \frac{1}{2}|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \\ &= \frac{1}{2}|(2, -1, 0) \times (-1, -2, 1)| \\ &= \frac{1}{2}|(-1, 2, -3)| \end{aligned}$$

Esimerkki 5.4

Tarkastellaan kolmiota ABC , missä $A = (1, 1, 0)$, $B = (3, 0, 2)$ ja $C = (0, -1, 1)$. Lasketaan kolmion ala.

Kolmion kaksi sivua ovat vektoreiden $\mathbf{u} = B - A = (2, -1, 0)$ ja $\mathbf{v} = C - A = (-1, -2, 1)$ suuntaisia. Vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ virittämän suunnikkaan pinta-ala on $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$. Kolmion pinta-ala on puolet tästä, eli $A = \frac{1}{2}|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \\ &= \frac{1}{2}|(2, -1, 0) \times (-1, -2, 1)| \\ &= \frac{1}{2}|(-1, 2, -3)| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4 + 9} \end{aligned}$$

Esimerkki 5.4

Tarkastellaan kolmiota ABC , missä $A = (1, 1, 0)$, $B = (3, 0, 2)$ ja $C = (0, -1, 1)$. Lasketaan kolmion ala.

Kolmion kaksi sivua ovat vektoreiden $\mathbf{u} = B - A = (2, -1, 0)$ ja $\mathbf{v} = C - A = (-1, -2, 1)$ suuntaisia. Vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ virittämän suunnikkaan pinta-ala on $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$. Kolmion pinta-ala on puolet tästä, eli $A = \frac{1}{2}|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \\ &= \frac{1}{2}|(2, -1, 0) \times (-1, -2, 1)| \\ &= \frac{1}{2}|(-1, 2, -3)| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4 + 9} \\ &= \frac{\sqrt{14}}{2} \end{aligned}$$

Määritelmä 5.5

Olkoot $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita. Vektorien $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ määräämä **vektorikolmitulo** on $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$.

Lause 5.6

Olkoot $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita ja θ niiden välinen kulma. Olkoon lisäksi $\mathbf{w}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektori ja α vektorien $\mathbf{w}$ ja $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ välinen kulma. Tällöin

$$|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}||\mathbf{w}| \sin \theta \cos \alpha$$

on vektorien $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ virittämän suuntaissärmiön tilavuus.

Lause 5.7

Olkoot $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita ja θ niiden välinen kulma. Olkoon lisäksi $\mathbf{w}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektori ja α vektorien $\mathbf{w}$ ja $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ välinen kulma. Tällöin

$$|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}||\mathbf{w}| \sin \theta \cos \alpha$$

on vektorien $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ virittämän suuntaissärmiön tilavuus.

Huomautus 5.8

Jos $\cos \alpha = \cos 0 = 1$, niin kyseessä on **lieriö**, jonka tilavuus on

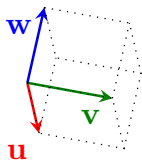
$$|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}||\mathbf{w}| \sin \theta \cos \alpha.$$

Jos edelleen $\sin \theta = \sin \frac{\pi}{2}$, niin kyseessä on **suorakulmainen särmiö**, jonka tilavuus on $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}||\mathbf{w}|$.

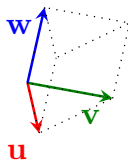
Jos edelleen $a = |\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = |\mathbf{w}|$, niin kyseessä on kuutio, jonka tilavuus on a^3 .

Leikkaamalla suuntaissärmiöstä osa, saadaan särmiö, prisma, pyramidi ja tetraedri.

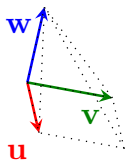
$$V_1 = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$



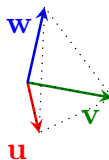
$$V_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$



$$V_3 = \frac{1}{3}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$



$$V_4 = \frac{1}{6}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$



Esimerkki 5.9

Tetraedrin kärkien paikkavektorit ovat $\mathbf{0}$, $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{v} = (-2, 3, 0)$ ja $\mathbf{w} = (3, -2, 1)$.

Tetraedrin tilavuus V on luvun

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

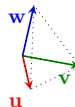
$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (3 - 0) - (-1) \cdot (-2 + 0) + 2 \cdot (4 - 9)$$

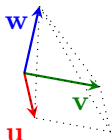
$$= 3 + 3 - 10 = -4$$

itseisarvo jaettuna kuudella, eli $V = 4/6 = 2/3$.

$$V_4 = \frac{1}{6}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$



$$V_3 = \frac{1}{3}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$



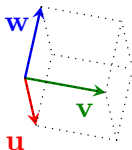
Esimerkki 5.10

Pyramidin eräs kärki on origo ja pohjaneliön särmät ovat $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$ ja $\mathbf{v} = (-2, 3, 0)$. Yksi pyramidin huippua kohti nousevista särmistä on $\mathbf{w} = (3, -2, 1)$.

Pyramidin pohjan kärkien paikkavektorit ovat $\mathbf{0}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. Pyramidin huipun paikkavektori on $\mathbf{w}$.

Pyramidin tilavuus V on luvun $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \dots = -4$ itseisarvo jaettuna kolmella, eli $V = 4/3$.

$$V_1 = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$



Esimerkki 5.11

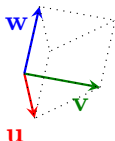
Suuntaissärmiön eräs kärki on origo ja särmät ovat $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{v} = (-2, 3, 0)$ ja $\mathbf{w} = (3, -2, 1)$.

Suuntaissärmien pohjan kärkien paikkavektorit ovat $\mathbf{0}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

Suuntaissärmiön kannen kärkien paikkavektorit ovat $\mathbf{0} + \mathbf{w}$, $\mathbf{u} + \mathbf{w}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ ja $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$.

Suuntaissärmiön tilavuus V on luvun $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \dots = -4$ itseisarvo eli $V = 4$.

$$V_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$



Esimerkki 5.12

Prisman eräs kärki on origo ja pohjankolmion särmät ovat $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$ ja $\mathbf{v} = (-2, 3, 0)$. Prisman muut särmät ovat vektorin $\mathbf{w} = (3, -2, 1)$ suuntaisia.

Prisman pohjan kärkien paikkavektorit ovat $\mathbf{0}$, $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$. Prisman kannen kärkien paikkavektorit ovat $\mathbf{0} + \mathbf{w}$, $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ ja $\mathbf{v} + \mathbf{w}$.

Prisman tilavuus V on luvun $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \dots = -4$ itseisarvo jaettuna kahdella, eli $V = 2$.