

Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Määritelmä 5.1

Vektori $\mathbf{u}$ kerrotaan skalaarilla eli reaalityyppisellä t siten, että jokainen komponentti kerrotaan skalaarilla t . Lopputulosta merkitään $t\mathbf{u}$.

Siis $t\mathbf{u}$ on vektori $\mathbf{u}$ **skaalattuna** skalaarilla t .

Esimerkki 5.2

Olkoon $\mathbf{u} = (3, 4)$ ja $t = 12$. Tällöin $t\mathbf{u} = 12 \cdot (3, 4) = (36, 48)$. Nyt $t > 0$ ja vektorit $(3, 4)$ ja $(36, 48)$ ovat **samansuuntaiset**.

Esimerkki 5.3

Olkoon $\mathbf{u} = (3, 4)$ ja $t = -7$. Tällöin $t\mathbf{u} = -7 \cdot (3, 4) = (-21, -28)$. Nyt $t < 0$ ja vektorit $(-3, 4)$ ja $(-21, -28)$ ovat **vastakkaissuuntaiset**.

Esimerkki 5.4

Olkoon $\mathbf{u} = (3, 4)$ ja $t = 0$. Tällöin $t\mathbf{u} = 0 \cdot (3, 4) = (0, 0) = \mathbf{0}$.

Määritelmä 5.5

Vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat **yhdensuuntaiset**, jos $\mathbf{u} = t\mathbf{v}$ jollakin $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tällöin $\mathbf{v} = \frac{1}{t}\mathbf{u}$. Erityisesti, jos $t > 0$, niin vektorit ovat **samansuuntaiset**, ja jos $t < 0$, niin vektorit ovat **vastakkaissuuntaiset**.

Joskus yhdensuuntaisuutta merkitään $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$. Samansuuntaisuutta voitaisiin merkitä $\mathbf{u} \uparrow\uparrow \mathbf{v}$ ja vastakkaisuuntaisuutta $\mathbf{u} \uparrow\downarrow$. Nämä merkinnät eivät ole vakiintuneita.

Huomautus 5.6

Olkoon $\mathbf{u}$ vektori ja $t = 0$. Tällöin $t\mathbf{u} = \mathbf{0}$ on nollavektori. Koska nollavektorilla ei ole suuntaa, ei sanota, että " $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{0}$ ovat yhdensuuntaiset".

Lause 5.7

Oletetaan, että $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat keskenään yhdensuuntaiset. Oletetaan lisäksi, että $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ ovat keskenään yhdensuuntaiset. Tällöin $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{w}$ ovat keskenään yhdensuuntaiset.

Todistus.

Joillakin skalaareilla $t, s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pätee $\mathbf{u} = t\mathbf{v}$ ja $\mathbf{v} = s\mathbf{w}$. Siis $\mathbf{u} = t(s\mathbf{w}) = (ts)\mathbf{w}$, missä $ts \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Väite seuraa. □

Määritelmä 5.8

Kaksi tason $\mathbb{R}^2$ tai avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoria lasketaan yhteen siten, että vektoreita vastaavat suunnatut janat asetetaan alkamaan samasta pisteestä ja summavektoria $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ vastaavaksi suunnatuksi janaksi valitaan syntyvän suunnikkaan se lävistäjä, joka myös alkaa samasta pisteestä.

Jos vektorit ovat yhdensuuntaiset, suunnikasta ei synny. Tällöin vektorit laitetaan peräkkäin ja summavektori $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ on ensimmäisen vektorin alkupisteestä toisen vektorin loppupisteeseen.

Kuva tähän.

Huomautus 5.9

Olkoott vektorin $\mathbf{u}$ komponentit a ja b sekä vektorin $\mathbf{v}$ komponentit x ja y . Tällöin summavektorin $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ komponentit ovat $a + x$ ja $b + y$.

Esimerkki 5.10

Olkoon $\mathbf{u} = (3, 4)$ ja $\mathbf{v} = (7, 8)$. Tällöin $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3 + 7, 4 + 8) = (10, 12)$.

Esimerkki 5.11

Olkoon $\mathbf{u} = (3, 4)$ ja $\mathbf{v} = (-5, 0)$. Tällöin $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3 + (-5), 4 + 0) = (-2, 4)$.

Määritelmä 5.12

Vektorin $\mathbf{u}$ **vastavektori** $-\mathbf{u}$ on se vektori, jonka pituus on $|\mathbf{u}|$ ja jonka suunta on vektorin $\mathbf{u}$ suunnalle päinvastainen. Siis $-\mathbf{u} = (-1) \cdot \mathbf{u}$.

Esimerkki 5.13

Vektorin $\mathbf{u} = (3, 4)$ vastavektori on $-\mathbf{u} = (-1) \cdot (3, 4) = (-3, -4)$.

Huomautus 5.14

Jos $\mathbf{u}$ on vektori, niin $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ on *nollavektori*. Nollavektorin pituus on nolla ja nollavektorilla ei ole suuntaa.

Määritelmä 5.15

Jos vektorin $\mathbf{u}$ pituus $|\mathbf{u}| = 1$, niin sanotaan, että $\mathbf{u}$ on *yksikkövektori*.

Jos vektori $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, niin vektoria

$$\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$$

sanotaan vektorin $\mathbf{u}$ *suuntavektoriksi*. Siis kyseessä on vektorin $\mathbf{u}$ suuntainen yksikkövektori.

Lause 5.16

Vektorit ovat yhdensuuntaiset, jos ja vain jos niillä on sama suuntavektori.

Aiemmin määriteltiin

Määritelmä 5.17

Kaksi tason $\mathbb{R}^2$ tai avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoria lasketaan yhteen siten, että vektoreita vastaavat suunnatut janat asetetaan alkamaan samasta pisteestä ja summavektoria $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ vastaavaksi suunnatuksi janaksi valitaan syntyvän suunnikkaan se lävistäjä, joka myös alkaa samasta pisteestä.

Jos vektorit ovat **yhdensuuntaiset**, suunnikasta ei synny. Tällöin vektorit laitetaan peräkkäin ja summavektori $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ on ensimmäisen vektorin alkupisteestä toisen vektorin loppupisteeseen.

Huomautus 5.18

Suunnikkaan toisen lävistäjän pituus on $|\mathbf{u} - \mathbf{v}| = |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$.

Kuva tähän.

Huomautus 5.19

Vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ erotus $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ lienee selkeintä laskea siten, että

Huomautus 5.19

Vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ erotus $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ lienee selkeintä laskea siten, että

piirretään $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$

piirretään $-\mathbf{v}$

piirretään $\mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.

Kuva tähän.