

Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Esimerkki

Olkoot $\mathbf{u} = (1, 4, 5)$ ja $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$. Esitetään $\mathbf{u}$ muodossa

$$\mathbf{u} = a\mathbf{v} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Huomataan, että

$$\mathbf{u} = (1, 4, 3) = (3, 0, 3) + (-2, 4, 2).$$

Tässä $(3, 0, 3) = 3(1, 0, 1) = 3\mathbf{v}$. Lisäksi $(-2, 4, 2) \cdot (1, 0, 1) = -2 + 0 + 2 = 0$. Siis

$$\mathbf{u} = 3 \cdot (1, 0, 1) + (-2, 4, 2).$$

eli $a = 2$, $\mathbf{w} = (-2, 4, 2)$.

Nyt esitystapa $(1, 4, 5) = (3, 0, 3) + (-2, 4, 2)$ pystyttiin huomaamaan lähinnä, koska vektorin $\mathbf{v}$ lauseke oli hyvin yksinkertainen.

Miten esitystapa löydetään yleisessä tilanteessa tarvitsematta arvailla?

Olkoot $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Esitetään vektori $\mathbf{u}$ muodossa

$$\mathbf{u} = a\mathbf{v} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Tässä vakio a täytyy löytää. Sen jälkeen voidaan laskea $\mathbf{w} = \mathbf{u} - a\mathbf{v}$.

Tässä $a\mathbf{v}$ on vektorin $\mathbf{v}$ suuntainen vektori. Toisaalta vektori $\mathbf{w}$ on vektoria $\mathbf{v}$ vastaan kohtisuorassa.

Määritelmä

Vektori $a\mathbf{v}$ on vektorin $\mathbf{u}$ **vektoriProjektio** vektorille $\mathbf{v}$. Vektori $\mathbf{w}$ on vektorin $\mathbf{u}$ **vektoria $\mathbf{v}$ vastaan kohtisuora komponentti**.

Oletetaan, että

$$\mathbf{u} = a\mathbf{v} + \mathbf{w},$$

missä $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0$. Otetaan puolittain pistetulo vektorin $\mathbf{v}$ kanssa, jolloin saadaan

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \underbrace{\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}}_{=0} = a|\mathbf{v}|^2.$$

Siis $a = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})/|\mathbf{v}|^2$. Siis

$$a\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v}$$

ja

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - a\mathbf{v} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v}.$$

Saatiin esitys

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} + \left(\mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} \right).$$

Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = (1, 4, 5)$ ja $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$. Etsitään esitys

$$\mathbf{u} = a\mathbf{v} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Nyt

$$a = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{(1, 4, 5) \cdot (1, 0, 1)}{|(1, 0, 1)|^2} = \frac{1 + 0 + 5}{1^2 + 0^2 + 1^2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Lisäksi

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - a\mathbf{v} = (1, 4, 5) - 3(1, 0, 1) = (-2, 4, 2).$$

Siis

$$\mathbf{u} = a\mathbf{v} + \mathbf{w} = 3(1, 0, 1) + (-2, 4, 2).$$

Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = (0, 2, -2)$ ja $\mathbf{v} = (1, -1, -2)$. Etsitään esitys

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} + \left(\mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} \right).$$

Nyt

$$\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{(0, 2, -2) \cdot (1, -1, -2)}{|(1, -1, -2)|^2} = \frac{0 - 2 + 4}{1 + 1 + 4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = (0, 2, -2) &= \frac{1}{3}(1, -1, -2) + \left[(0, 2, -2) - \frac{1}{3}(1, -1, -2) \right] \\ &= \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right) + \left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{4}{3} \right). \end{aligned}$$

Esimerkki (jatkuu)

Löydettiin siis esitys

$$\mathbf{u} = a\mathbf{v} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Tarkistetaan ehto $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0$. Saadaan

$$\left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{4}{3}\right) \cdot (1, -1, -2) = \frac{1}{3}(-1, 7, -4) \cdot (1, -1, -2) = \frac{1}{3}(-1 - 7 + 8) = 0.$$

Kaavaa voidaan pohtia

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} + \left(\mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} \right).$$

erottamalla erilleen yksikkövektori $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \left(\underbrace{\mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}}_{\hat{\mathbf{v}}} \right) \underbrace{\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}}_{\hat{\mathbf{v}}} + \left[\mathbf{u} - \left(\underbrace{\mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}}_{\hat{\mathbf{v}}} \right) \underbrace{\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}}_{\hat{\mathbf{v}}} \right] \\ &= (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}} + (\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}}). \end{aligned}$$

Siis

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

mittaa “kuinka suuri osuus” vektorista $\mathbf{u}$ täytyy jakaa vektorin $\mathbf{v}$ suuntaiselle komponentille. Eli suuntaan $\hat{\mathbf{v}}$ mennään sitten tämän verran.

Olkoot $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Voidaan aina tehdä esitys

$$\mathbf{u} = \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right) \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} + \left[\mathbf{u} - \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right) \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right]$$

Määritelmä

Vektori

$$\left(\mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right) \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

on vektorin $\mathbf{u}$ **vektori** projektiio vektorille $\mathbf{v}$.

Luku

$$\mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

on vektorin $\mathbf{u}$ **skalaari** projektiio vektorille $\mathbf{v}$.

Vektori

$$\left[\mathbf{u} - \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right) \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right]$$

on vektorin $\mathbf{u}$ **vektoria** $\mathbf{v}$ vastaan kohtisuora komponentti.

Olkoot $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Voidaan aina tehdä esitys

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \\ &= \mathbf{u}_{||\mathbf{v}} + \mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}} \\ &= \mathbf{u}_{||\mathbf{v}} + (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{||\mathbf{v}}) \\ &= \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right) \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} + \left[\mathbf{u} - \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right) \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right].\end{aligned}$$

Määritelmä

Vektori $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_{||\mathbf{v}} = \mathbf{u}_{\mathbf{v}}$ on vektorin $\mathbf{u}$ **vektoriprojektio** vektorille $\mathbf{v}$.

Luku

$$\mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = |\mathbf{u}_1| = |\mathbf{u}_{||\mathbf{v}}| = u_{\mathbf{v}}$$

on vektorin $\mathbf{u}$ **skalaariprojektio** vektorille $\mathbf{v}$.

Vektori $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}}$ on vektorin $\mathbf{u}$ **vektoria $\mathbf{v}$ vastaan kohtisuora komponentti**.

Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ ja $\mathbf{v} = (0, 0, 2)$. Vektorin $\mathbf{u}$ skalaariprojektio vektorille $\mathbf{v}$ on

$$|\mathbf{u}_{||\mathbf{v}}| = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{6}{2} = 3.$$

Vektorin $\mathbf{u}$ vektoriprojektio vektorille $\mathbf{v}$ on

$$\mathbf{u}_{||\mathbf{v}} = 3 \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = 3 \cdot (0, 0, 1) = (0, 0, 3).$$

Vektorin $\mathbf{u}$ vektoria $\mathbf{v}$ vastaan kohtisuora komponentti on

$$\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}} = (1, 2, 0).$$

Tämän pituus on $|\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}}| = \sqrt{5}$. Pythagoraan lauseen mukaisesti $|\mathbf{u}|^2 = 14 = 9 + 5 = |\mathbf{u}_{||\mathbf{v}}|^2 + |\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}}|^2$.

Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ ja $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$. Selvitä seuraavat luvut ja vektorit.

Mikä on $|\mathbf{u}_{||\mathbf{v}}|$?

Mitä ovat on $|\mathbf{u}|$ ja $|\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}}|$? (Pythagoraan lause)

Mikä on $|\mathbf{v}|$?

Mikä on $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$?

Mikä on $\mathbf{u}_{||\mathbf{v}}$?

Mikä on $\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}}$?