

Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ ja $\mathbf{v} = (0, 0, 2)$. Vektorin $\mathbf{u}$ skalaariprojektio vektorille $\mathbf{v}$ on

$$|\mathbf{u}_{||\mathbf{v}}| = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{6}{2} = 3.$$

Vektorin $\mathbf{u}$ vektoriprojektio vektorille $\mathbf{v}$ on

$$\mathbf{u}_{||\mathbf{v}} = 3 \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = 3 \cdot (0, 0, 1) = (0, 0, 3).$$

Vektorin $\mathbf{u}$ vektoria $\mathbf{v}$ vastaan kohtisuora komponentti on

$$\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}} = (1, 2, 0).$$

Tämän pituus on $|\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}}| = \sqrt{5}$. Pythagoraan lauseen mukaisesti $|\mathbf{u}|^2 = 14 = 9 + 5 = |\mathbf{u}_{||\mathbf{v}}|^2 + |\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}}|^2$.

Jos $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ ja $\mathbf{v} = (0, 0, 2)$, niin miten voidaan suoraan laskea $|\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}}| = \sqrt{5}$?

On hankalaa, jos esityksessä

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \\ &= \mathbf{u}_{||\mathbf{v}} + \mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}} \\ &= \mathbf{u}_{||\mathbf{v}} + (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{||\mathbf{v}}) \\ &= \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right) \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} + \left[\mathbf{u} - \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right) \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right]\end{aligned}$$

kohtisuora komponentti $\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}}$ ja sen pituus $|\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}}|$ jouduttaisiin aina laskemaan kiertotietä “lasketaan ensin $\mathbf{u}_{||\mathbf{v}}$, sitten $\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{||\mathbf{v}}$ ja sitten voidaan laskea tämän vektorin pituus”.

Joskus juuri $\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}}$ tai $|\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}}|$ olisi kiinnostuksen kohteena, ainakin etäisyyksiä laskettaessa.

Haluttaisiin laskea $|\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}}|$ “suoraan ja helpolla kaavalla”.

Osoittautuu, että esityksessä

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \\ &= \mathbf{u}_{||\mathbf{v}} + \mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}} \\ &= \mathbf{u}_{||\mathbf{v}} + (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{||\mathbf{v}}) \\ &= \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right) \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} + \left[\mathbf{u} - \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right) \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right]\end{aligned}$$

pituus $|\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}}|$ voidaan laskea ristitulon avulla.

Vektoria $\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}}$ ei voida laskea suoraan, koska sen suuntaa ei tiedetä laskematta erotusta $\mathbf{u} - \mathbf{u}_{||\mathbf{v}}$.

Lause

Esityksessä

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \\ &= \mathbf{u}_{\parallel \mathbf{v}} + \mathbf{u}_{\perp \mathbf{v}} \\ &= \mathbf{u}_{\parallel \mathbf{v}} + (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel \mathbf{v}}) \\ &= \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right) \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} + \left[\mathbf{u} - \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right) \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right]\end{aligned}$$

pituus $|\mathbf{u}_{\perp \mathbf{v}}|$ toteuttaa

$$|\mathbf{u}_{\perp \mathbf{v}}| = \frac{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}.$$

Todistus.

Olkoon

$$\mathbf{u} = a\mathbf{v} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Koska $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0$, niin vektorien $\mathbf{w}$ ja $\mathbf{v}$ välinen kulma on $\frac{\pi}{2}$ (vektorit ovat toisiaan vastaan kohtisuorat) ja vektorien ristitulolle pätee $|\mathbf{w} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{w}||\mathbf{v}| \sin \frac{\pi}{2} = |\mathbf{w}||\mathbf{v}|$. Toisaalta $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$. Otetaan yhtälöstä

$$\mathbf{u} = a\mathbf{v} + \mathbf{w}$$

puolittain ristitulo " $\times \mathbf{v}$ " oikealta, saadaan

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = a\mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{w} \times \mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{v}.$$

Siis

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{w} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{w}||\mathbf{v}|, \quad \text{joten} \quad |\mathbf{w}| = \frac{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}.$$



Esimerkki

Mikä on suoran $p + t\mathbf{v} = (1, 2, 3) + t(1, -2, 0)$ etäisyys pisteestä $q = (1, 1, 1)$?

Vektori pisteestä q pisteelle p on $\mathbf{u} = p - q = (0, 1, 2)$. Lyhin vektori pisteestä q suoralle $p + t\mathbf{v}$ on $\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}}$. Tämän pituus on

$$|\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}}| = \frac{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}.$$

Nyt

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (1, 2, 3) \cdot (1, 1, 1) = (-1, 2, -1).$$

Siis

$$|\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}}| = \frac{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}.$$

Siis kysytty etäisyys on $\sqrt{2}$.