

Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Tasossa voidaan tarkastella kahden eri kuvion välistä etäisyyttä. Mahdollisia kuvioita ovat esimerkiksi piste, suora, ympyrä ja monikulmio.

Esimerkki

Lasketaan pisteen $p = (1, 2)$ etäisyys pisteestä $q = (7, -2)$. Tarkastellaan vektoria $\mathbf{u} = \vec{pq} = q - p = (7 - 1, -2 - 2) = (6, -4)$. Pythagoraan lauseella saadaan

$$\text{dist}(p, q) = |\mathbf{u}| = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \approx 7,21.$$

Toisaalta, voidaan suoraan käyttää pisteiden koordinaatteja, jolloin saadaan sama tulos

$$\text{dist}(p, q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2} = \dots = 2\sqrt{13}.$$

Huomautus

Pisteiden välisen etäisyyden neliö olisi helpompi laskea

$$\text{dist}(p, q)^2 = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}^2 = \dots = 52.$$

Määritelmä

Kahden kuvion A ja B välinen **etäisyys** $\text{dist}(A, B)$ on minimi etäisyyksistä p, q , missä $p \in A$ ja $q \in B$.

Esimerkki

Tarkastellaan pistettä $q = (3, 4)$ ja suoraa $p(t) = (1, 1) + t(2, 1) = (1 + 2t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$. Lasketaan etäisyyden neliö

$$\begin{aligned}\text{dist}(p(t), q)^2 &= (1 + 2t - 3)^2 + (1 + t - 4)^2 = (2t - 2)^2 + (t - 3)^2 \\&= 4t^2 - 8t + 4 + t^2 - 6t + 9 = 5t^2 - 14t + 13 \\&= 5 \left[t^2 - \frac{14}{5} \right] + 13 = 5 \left[t^2 - 2 \cdot \frac{7}{5} + \frac{7^2}{5^2} - \frac{7^2}{5^2} \right] + 13 \\&= 5 \left(t - \frac{7}{5} \right)^2 + \frac{16}{5}.\end{aligned}$$

Siis pistettä q lähin piste on $p(7/5) = (19/5, 12/5)$ ja $\text{dist}(p(7/5), q) = \sqrt{16/5} = 4/\sqrt{5} \approx 1,79$.

Määritelmä

Kahden kuvion A ja B välinen **etäisyys** $\text{dist}(A, B)$ on minimi etäisyyksistä p, q , missä $p \in A$ ja $q \in B$.

Esimerkki

Pistettä $q = (3, 4)$ lähin suoran $p(t) = (1, 1) + t(2, 1) = (1 + 2t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$ piste on $(19/5, 12/5)$. Merkitään

$$\mathbf{u} = (2, 1), \quad \mathbf{v} = (3, 4) - (19/5, 12/5) = \frac{1}{5}(-4, 8).$$

Tällöin $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Lause

Pistettä q lähin suoran $p(t) = p_0 + t\mathbf{u}$ piste p_1 toteuttaa $(q - p_1) \cdot \mathbf{u} = 0$.

Lause

Pistettä q lähin suoran $p(t) = p_0 + t\mathbf{u}$ piste p_1 toteuttaa $(q - p_1) \cdot \mathbf{u} = 0$.

Lause voidaan muotoilla yhtäpitävästi toisella tavalla.

Lause

Tarkastellaan suoraa L ja suoran ulkopuolista pistettä Q . Olkoon $P, R \in L$ kaksi eri pistettä. Oletetaan, että kulma $\angle QPR$ on suora. Tällöin P on suoran pisteistä lähimpänä pistettä Q .

Todistus.

Olkoon $A \in L$, $A \neq P$. Pythagoraan lauseen perusteella

$$|QA| = \sqrt{|QP|^2 + |PA|^2} > \sqrt{|QP|^2 + 0} = |QP|.$$



Lause

Tarkastellaan suoraa L ja suoran ulkopuolista pistettä Q . Olkoon $P, R \in L$ kaksi eri pistettä. Oletetaan, että kulma $\angle QPR$ on suora. Tällöin P on suoran pisteistä lähimpänä pistettä Q .

Todistus.

Olkoon $A \in L$, $A \neq P$. Pythagoraan lauseen perusteella

$$|QA| = \sqrt{|QP|^2 + |PA|^2} > \sqrt{|QP|^2 + 0} = |QP|.$$



Siis Pythagoraan lauseesta johtuen kohtisuorat etäisyydet ovat lyhimpiä! Tämä pätee yleisesti!

Lause

Tarkastellaan suoraa L ja suoran ulkopuolista pistettä Q . Olkoon $P, R \in L$ kaksi eri pistettä. Oletetaan, että kulma $\angle QPR$ on suora. Tällöin P on suoran pisteistä lähimpänä pistettä Q .

Seuraus

Pisteen q etäisyys suorasta L , jolla on parametriesitys $p(t) = p_0 + t\mathbf{u}$, toteuttaa

$$\text{dist}(q, L) = |(q - p_0) - [(q - p_0) \cdot \hat{\mathbf{u}}] \cdot \hat{\mathbf{u}}|$$

ja

$$\text{dist}(q, L) = |(q - p_0) \times \hat{\mathbf{u}}| = \frac{|(q - p_0) \times \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|}$$

Todistus.

Tulos seuraa vektoriprojektion ja ristitulon ominaisuuksista. □

Esimerkki

Lasketaan pisteen $q = (3, 4)$ ja suoran $p(t) = p_0 + t\mathbf{u} = (1, 1) + t(2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ välinen etäisyys. Merkitään $\mathbf{v} = q - p_0 = (3, 4) - (1, 1) = (2, 3)$. Nyt etäisyys on vektorin

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u}$$

pituus. Nyt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = (2, 3) \cdot (2, 1) = 4 + 3 = 7$ ja $|\mathbf{u}|^2 = 2^2 + 1^2 = 5$. Siis

$$\mathbf{w} = (2, 3) - \frac{7}{5}(2, 1) = \frac{1}{5}(-4, -6)$$

ja $|\mathbf{w}| = \frac{1}{5}\sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{80/25} = \sqrt{16/5} = 4/\sqrt{5}$. Siis etsitty etäisyys on $4/\sqrt{5}$.

Esimerkki

Lasketaan pisteen $q = (3, 4)$ ja suoran $p(t) = p_0 + t\mathbf{u} = (1, 1) + t(2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ välinen etäisyys. Merkitään $\mathbf{v} = q - p_0 = (3, 4) - (1, 1) = (2, 3)$. Nyt etäisyys on vektorin

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$$

pituus. Nyt $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = (2, 3) \times (2, 1) = (2 \cdot 1 - 3 \cdot 2)\mathbf{k} = -4\mathbf{k}$ ja $|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. Siis

$$\mathbf{w} = -\frac{4}{\sqrt{5}}\mathbf{k}, \quad |\mathbf{w}| = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Siis etsitty etäisyys on $4/\sqrt{5}$.