

Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Avaruudessa voidaan tarkastella kahden eri kuvion välistä etäisyyttä. Mahdollisia kuvioita ovat esimerkiksi piste, suora, taso, pallo ja sylinteri.

Esimerkki

Lasketaan pisteen $p = (1, 2, 3)$ etäisyys pisteestä $q = (0, 0, 7)$. Saadaan

$$\text{dist}(p, q) = \sqrt{(1 - 0)^2 + (2 - 0)^2 + (3 - 7)^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Esimerkki

Lasketaan pisteen $p = (1, 2, 3)$ etäisyys pallosta, jonka keskipiste on $q = (0, 0, 7)$ ja säde on 1, 2. Keskipisteiden välinen etäisyys on 4. Tästä täytyy vähentää 1, 2. Siis pisteen p etäisyys pallokuoresta on 2, 8.

Määritelmä

Kahden kuvion A ja B välinen **etäisyys** $\text{dist}(A, B)$ on minimi etäisyyksistä p, q , missä $p \in A$ ja $q \in B$.

Esimerkki

Etsitään pistettä $p = (1, 2, 3)$ lähin piste pallolla, jonka keskipiste on $q = (0, 0, 7)$ ja säde on 1.2. Merkitään $\mathbf{v} = p - q = (1, 2, -4)$, jolloin $|\mathbf{v}| = \sqrt{21}$. Etsitty piste on

$$r = q + 1.2\hat{\mathbf{v}} = q + \frac{1.2}{\sqrt{21}}\mathbf{v}.$$

Nyt $1.2/\sqrt{21} \approx 0.26$, joten saadaan

$$r = (0, 0, 7) + 0.26(1, 2, -4) = (0.26, 0.52, 5.96).$$

Piste $r = (0.26, 0.52, 5.96)$ on pisteiden $(1, 2, 3)$ ja $(0, 0, 7)$ kautta kulkevalla suoralla, joka kohtaa pallopinnan kohtisuorasti.

Kuten tasossa $\mathbb{R}^2$ saadaan seuraava tulos.

Lause

Pistettä q lähin suoran $p(t) = p_0 + t\mathbf{u}$ piste p_1 toteuttaa $(q - p_1) \cdot \mathbf{u} = 0$.

Lause voidaan muotoilla yhtäpitävästi toisella tavalla.

Lause

Tarkastellaan suoraa L ja suoran ulkopuolista pistettä Q . Olkoon $P, R \in L$ kaksi eri pistettä. Oletetaan, että kulma $\angle QPR$ on suora. Tällöin P on suoran pisteistä lähimpänä pistettä Q .

Todistus.

Olkoon $A \in L$, $A \neq P$. Pythagoraan lauseen perusteella

$$|QA| = \sqrt{|QP|^2 + |PA|^2} > \sqrt{|QP|^2 + 0} = |QP|.$$



Lause

Tarkastellaan suoraa L ja suoran ulkopuolista pistettä Q . Olkoon $P, R \in L$ kaksi eri pistettä. Oletetaan, että kulma $\angle QPR$ on suora. Tällöin P on suoran pisteistä lähimpänä pistettä Q .

Seuraus

Pisteen q etäisyys suorasta L , jolla on parametriesitys $p(t) = p_0 + t\mathbf{u}$, toteuttaa

$$\text{dist}(q, L) = |(q - p_0) - [(q - p_0) \cdot \hat{\mathbf{u}}] \cdot \hat{\mathbf{u}}|$$

ja

$$\text{dist}(q, L) = |(q - p_0) \times \hat{\mathbf{u}}| = \frac{|(q - p_0) \times \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|}$$

Todistus.

Tulos seuraa vektoriprojektion ja ristitulon ominaisuuksista. □

Esimerkki

Lasketaan pisteen $q = (3, 3, 0)$ ja suoran $p(t) = (1, 2, 3) + t\mathbf{u} = (1, 2, 3) + t(0, 1, 5)$, $t \in \mathbb{R}$ välinen etäisyys. Merkitään $\mathbf{v} = q - p_0 = (2, 1, -3)$. Nyt etäisyys on vektorin

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u}$$

pituus. Nyt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = (2, 1, -3) \cdot (0, 1, 5) = 0 + 1 - 15 = -14$ ja $|\mathbf{u}|^2 = 1^2 + 5^2 = 26$. Siis

$$\mathbf{w} = (2, 1, -3) - \frac{-14}{26}(0, 1, 5) = \frac{1}{13}[13(2, 1, -3) + 7(0, 1, 5)] = \frac{1}{13}(26, 20, -4)$$

ja $|\mathbf{w}| = \frac{1}{13}\sqrt{26^2 + 20^2 + (-4)^2} = \sqrt{26^2 + 20^2 + (-4)^2}/13 = \sqrt{1092}/13$. Tässä $\sqrt{1092}/13 = \sqrt{4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13}/13 = 2\sqrt{21/13} \approx 2.54$.

Esimerkki

Lasketaan pisteen $q = (3, 4)$ ja suoran $p(t) = p_0 + t\mathbf{u} = (1, 1) + t(2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ välinen etäisyys. Merkitään $\mathbf{v} = q - p_0 = (3, 4) - (1, 1) = (2, 3)$. Nyt etäisyys on vektorin

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$$

pituus. Nyt $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = (2, 1, -3) \times (0, 1, 5) = (8, 10, 2)$ ja $|\mathbf{u}| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$. Siis

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{26}}(8, 10, 2).$$

Siis etsitty etäisyys on

$$|\mathbf{w}| = \frac{\sqrt{8^2 + 10^2 + 2^2}}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{168}}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{8 \cdot 21}}{\sqrt{2 \cdot 13}} = 2\sqrt{21/13}.$$