

Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Lause

Jos on annettu kaksi ei-yhdensuuntaista suoraa

$$p(t) = p_0 + t\mathbf{u}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$q(s) = q_0 + s\mathbf{v}, \quad s \in \mathbb{R},$$

joille siis $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, niin suorien välinen etäisyys on

$$\frac{|(q_0 - p_0) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}.$$

Esimerkki

Tarkastellaan suoraa

$$p(t) = p_0 + t\mathbf{u} = (1, 0, 0) + t(0, 1, 0), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$q(s) = q_0 + s\mathbf{v} = (0, 2, 3) + s(2, 0, -1), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Nyt $\mathbf{r}_0 = q_0 - p_0 = (-1, 2, 3)$ ja $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (0, 1, 0) \times (2, 0, -1) = (-1, 0, -2)$.
Edelleen $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{w} = (-1, 2, 3) \cdot (-1, 0, -2) = 1 - 6 = -5$ ja $|\mathbf{w}| = \sqrt{5}$. Siis suorien
välinen etäisyys on

$$\frac{|\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{w}|}{|\mathbf{w}|} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \approx 2.24.$$

Esimerkki

Tarkastellaan suoraa

$$\begin{aligned}L_1 : \quad p(t) &= p_0 + t\mathbf{u} = (1, 0, 0) + t(0, 1, 0), \quad t \in \mathbb{R}, \\L_2 : \quad q(s) &= q_0 + s\mathbf{v} = (0, 2, 3) + s(0, -2, 0), \quad s \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Nyt $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat yhdensuuntaisia. Tämä nähdään huomaamalla että $\mathbf{v} = -2\mathbf{u}$ tai laskemalla $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (0, 0, 0) = \mathbf{0}$.

Siis suorien etäisyys saadaan laskemalla esimerkiksi pisteen p_0 etäisyys suorasta L_2

$$\text{dist}(p_0, L_2) = |\mathbf{r}_0 - (\mathbf{r}_0 \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}}|$$

ja

$$\text{dist}(p_0, L_2) = |\mathbf{r}_0 \times \hat{\mathbf{v}}| = \frac{|\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|},$$

missä $\mathbf{r}_0 = q_0 - p_0$.

Kuva tähän.

Todistus.

Olkoot suorien pisteistä lähimpänä toisiaan p_1 ja q_1 , olkoon $\mathbf{r}_1 = q_1 - p_1$ ja $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Tällöin $\mathbf{r}_1$ on kohtisuorassa sekä vektoria $\mathbf{u}$ että vektoria $\mathbf{v}$ vastaan, joten $\mathbf{r}_1 = a\mathbf{w}$ jollakin skalaarilla a . Vektori $\mathbf{r}_1 = q_1 - p_1$ on vektorin $\mathbf{r}_0 = q_0 - p_0$ vektoriprojektio vektorille $\mathbf{w}$. Siis

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}.$$

Siis

$$|\mathbf{r}_1| = \frac{|\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{w}|}{|\mathbf{w}|} = \frac{|(q_0 - p_0) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}$$

