

Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Määritelmä

Jos suorat $p_0 + t\mathbf{u}$ ja $q_0 + t\mathbf{v}$ leikkaavat, niin **suorien välinen kulma** on niiden suuntavektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ välinen kulma.

Jos suora $p_0 + t\mathbf{u}$ ja taso $ax + by + cz = d$ leikkaavat, niin **suoran ja tason välinen kulma** on suoran suuntavektorin $\mathbf{u}$ ja tason normaalin $\mathbf{n} = (a, b, c)$ välinen kulma.

Jos tasot $ax + by + cz = d$ ja $Ax + By + Cz = D$ leikkaavat, niin **tasojen välinen kulma** on niiden normaalien $\mathbf{n} = (a, b, c)$ ja $\mathbf{N} = (A, B, C)$ välinen kulma.

Esimerkki (suorien välinen kulma)

Tarkastellaan suorita

$$p(t) = (1, 1, 1) + t(1, 2, 3),$$

$$q(t) = (1, 1, 1) + s(-1, 0, 1).$$

Suorat leikkaavat pisteessä $(1, 1, 1)$. Suorien välinen kulma on niiden suuntavektorien $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ ja $\mathbf{v} = (-1, 0, 1)$ välinen kulma α . Saadaan

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}.$$

Nyt $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -1 + 3 = 2$, $|\mathbf{u}| = \sqrt{14}$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{2}$ ja

$$\alpha = \arccos \frac{2}{\sqrt{14}\sqrt{2}} \approx 1.18 \approx 67.79^\circ.$$

Esimerkki (suorien välinen kulma)

Tarkastellaan suorita

$$\begin{aligned}p(t) &= (1, 1, 1) + t(1, 2, 3), \\q(s) &= (1, 1, 100) + s(-1, 0, 1).\end{aligned}$$

Suorat eivät leikkaa. Ei määritellä suorien välistä kulmaa. Kuitenkin, kuten aiemmassa esimerkissä, suorien suuntavektorien välinen kulma on määritelty ja sen arvo on

$$\alpha \approx 1.18 \approx 67.79^\circ.$$

Esimerkki (suoran ja tason välinen kulma)

Tarkastellaan suoraa $p(t) = p_0 + t\mathbf{u} = (1, 1, 1) + t(1, 2, 3)$ ja tasoa $x - y + 2z = 7$. Tason normaali on $\mathbf{n} = (1, -1, 2)$. Suoran ja tason välinen kulma on vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{n}$ välinen kulma α , joka toteuttaa

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{u}||\mathbf{n}|}.$$

Nyt $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = (1, 2, 3) \cdot (1, -1, 2) = 1 - 2 + 6 = 5$, $|\mathbf{u}| = \sqrt{14}$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{6}$ ja

$$\alpha = \arccos \frac{5}{\sqrt{14}\sqrt{6}} \approx 0.9938 \approx 56.94^\circ.$$

Esimerkki (tasojen välinen kulma)

Tarkastellaan tasoja

$$x - y + 2z = 7$$

$$3x + 5y = 3.$$

Tasojen normaalit ovat $\mathbf{n} = (1, -1, 2)$ ja $\mathbf{N} = (3, 5, 0)$. Tasojen välinen kulma α on normaalien $\mathbf{n}$ ja $\mathbf{N}$ välinen kulma ja toteuttaa

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}}{|\mathbf{n}||\mathbf{N}|} = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Nyt $\mathbf{n} \cdot \mathbf{N} = (1, -1, 2) \cdot (3, 5, 0) = -2$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{6}$, $|\mathbf{N}| = \sqrt{34}$ ja

$$\alpha = \arccos \frac{-2}{\sqrt{6}\sqrt{34}} \approx 1.71 \approx 98.05^\circ.$$

Toisaalta $\pi - \alpha \approx 1.43 \approx 81.95^\circ$.

Tasojen väliseksi kulmaksi voidaan valita jokin kulma $\beta \in [0, \pi/2]$, edellisessä esimerkissä voitaisiin valita $\beta = 81.95^\circ$. Tulos saataisiin automaattisesti tässä muodossa pakottamalla kosinin arvo positiiviseksi ottamalla itseisarvot pistetulosta $\cos \beta = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}|}{|\mathbf{n}||\mathbf{N}|}$. Hyväksytään tuloksista 98.05° ja 81.95° kumpikin.

Esimerkki (tasojen välinen kulma)

Tarkastellaan tasoja

$$ax + by + cz = d$$

$$Ax + By + Cz = D.$$

Tasojen normaalit ovat $\mathbf{n} = (a, b, c)$ ja $\mathbf{N} = (A, B, C)$. Tasojen välinen kulma α on normaalien $\mathbf{n}$ ja $\mathbf{N}$ välinen kulma ja toteuttaa

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}}{|\mathbf{n}||\mathbf{N}|} = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Perustelu. Jos taso kulkee pisteen $p = (p_1, p_2, p_3)$ kautta ja tasolla on normaalina $\mathbf{n} = (a, b, c)$, niin tason piste $X = (x, y, z)$ toteuttaa

$$(X - p) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \Leftrightarrow X \cdot \mathbf{n} = p \cdot \mathbf{n}.$$

Aukikirjoitettuna saadaan yhtälö $ax + by + cz = d$, missä $d = p \cdot \mathbf{n}$. Siis normaalit $\mathbf{n}$ ja $\mathbf{N}$ on laskettu oikein.

Selvästi tasojen välinen kulma on normaalien välinen kulma. Kaavassa

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}}{|\mathbf{n}||\mathbf{N}|} = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

ensimmäinen yhtäsuuruus on tunnettu ja toinen saadaan suoralla laskulla.