

Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Avaruudessa voidaan tarkastella kahden eri kuvion välistä etäisyyttä. Mahdollisia kuvioita ovat esimerkiksi piste, suora, taso, pallo ja sylinteri.

Esimerkki

Lasketaan pisteen $p = (1, 2, 3)$ etäisyys pisteestä $q = (0, 0, 7)$. Saadaan

$$\text{dist}(p, q) = \sqrt{(1 - 0)^2 + (2 - 0)^2 + (3 - 7)^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Esimerkki

Lasketaan pisteen $p = (1, 2, 3)$ etäisyys pallosta, jonka keskipiste on $q = (0, 0, 7)$ ja säde on 1, 2. Keskipisteiden välinen etäisyys on 4. Tästä täytyy vähentää 1, 2. Siis pisteen p etäisyys pallokuoresta on 2, 8.

Määritelmä

Kahden kuvion A ja B välinen **etäisyys** $\text{dist}(A, B)$ on minimi etäisyyksistä p, q , missä $p \in A$ ja $q \in B$.

Esimerkki

Etsitään pistettä $p = (1, 2, 3)$ lähin piste pallolla, jonka keskipiste on $q = (0, 0, 7)$ ja säde on 1.2. Merkitään $\mathbf{v} = p - q = (1, 2, -4)$, jolloin $|\mathbf{v}| = \sqrt{21}$. Etsitty piste on

$$r = q + 1.2\hat{\mathbf{v}} = q + \frac{1.2}{\sqrt{21}}\mathbf{v}.$$

Nyt $1.2/\sqrt{21} \approx 0.26$, joten saadaan

$$r = (0, 0, 7) + 0.26(1, 2, -4) = (0.26, 0.52, 5.96).$$

Piste $r = (0.26, 0.52, 5.96)$ on pisteiden $(1, 2, 3)$ ja $(0, 0, 7)$ kautta kulkevalla suoralla, joka kohtaa pallopinnan kohtisuorasti.

Tarkastellaan seuraavien kuvioden välisiä etäisyyksiä.

- (P) piste
- (S) suora
- (T) taso

Esimerkki (PP, pisteen etäisyys pisteestä)

Pisteen $q = (q_1, q_2, q_3)$ etäisyys pisteestä $p = (p_1, p_2, p_3)$ on

$$\text{dist}(p, q) = |q - p| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}.$$

Lause (PS, pisteen etäisyys suorasta)

Pisteen q etäisyys suorasta L , jolla on parametriesitys $p(t) = p_0 + t\mathbf{u}$, on

$$\begin{aligned}\text{dist}(q, L) &= |\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}}| = \left| \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u} \right| \\ &= |\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{u}}| = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|},\end{aligned}$$

missä $\mathbf{v} = q - p_0$.

Lause (PT, pisteen etäisyys tasosta)

Pisteen $p = (p_1, p_2, p_3)$ etäisyys tasosta T , jonka yhtälö on $ax + by + cz = d$, on

$$\text{dist}(p, T) = \frac{|d - (ap_1 + bp_2 + cp_3)|}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|f(p)|}{|\mathbf{n}|^2},$$

missä $f(x, y, z) = ax + by + cz - d$ ja $\mathbf{n} = (a, b, c)$ on tason normaali.

Esimerkki (tason etäisyys origosta)

Tason T , jonka yhtälö on $ax + by + cz = d$, etäisyys origosta on

$$\text{dist}(\mathbf{0}, T) = \frac{|d|}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Esimerkki (TT, tason etäisyys tasosta)

Tasot T_1 ja T_2 ovat yhdensuuntaiset, jos ja vain jos niiden normaalit ovat yhdensuuntaiset. Tässä tilanteessa tasojen yhtälöt ovat muotoa

$$ax + by + cz = d$$

$$ax + by + cz = e.$$

Tasojen etäisyys toisistaan on itseisarvo lausekkeesta “ensimmäisen etäisyys origosta $\pm$ toisen etäisyys origosta” eli

$$\text{dist}(T_1, T_2) = \frac{|d - e|}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Esimerkki (ST, suoran etäisyys tasosta)

Suora S , $p(t) = p + t\mathbf{u}$, ja taso T , yhtälö $ax + by + cz = d$, normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$, ovat yhdensuuntaiset, jos ja vain jos $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$. Tällöin

$$\text{dist}(S, T) = \text{dist}(p, T) = \frac{|d - (ap_1 + bp_2 + cp_3)|}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|f(p)|}{|\mathbf{n}|^2},$$

missä $f(x, y, z) = ax + by + cz - d$ ja $\mathbf{n} = (a, b, c)$ on tason normaali.