

Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Esimerkki

Tarkastellaan kuutiota, jonka särmän pituus on 1. Yksi kuution kärjistä voidaan asettaa origoon. Tällöin kiertämällä kolme lähintä kärkeä saadaan pisteisiin $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ ja $(0, 0, 1)$.

Kuution origosta lähteviä särmiä esittävät vektorit

$$\mathbf{u} = (1, 0, 0),$$

$$\mathbf{v} = (0, 1, 0),$$

$$\mathbf{w} = (0, 0, 1).$$

Löydetäänkö tällainen särmien esitys myös muiden säännöllisten monitahokkaiden (tetraedri, oktaedri, dodekaedri, ikosaedri) tapauksessa?

Esimerkki

Tarkastellaan säännöllistä tetraedria, jonka särmän pituus on 1. Asetetaan yksi kärki origoon, toinen pisteeseen $(1, 0, 0)$, kolmas pisteeseen $(1/2, \sqrt{3}/2, 0)$. Nyt neljäs kärki on pisteessä $(1/2, \sqrt{3}/6, \pm\sqrt{2/3})$. Tarvittaessa kiertämällä, neljäs kärki saadaan pisteeseen $(1/2, \sqrt{3}/6, \sqrt{2/3})$.

Tetraedrin origosta lähteviä särmiä esittävät vektorit

$$\mathbf{u} = (1, 0, 0),$$

$$\mathbf{v} = (1/2, \sqrt{3}/2, 0) \approx (0.5, 0.866, 0),$$

$$\mathbf{w} = (1/2, \sqrt{3}/6, \sqrt{2/3}) \approx (0.5, 0.289, 0.816).$$

Esimerkki

Tarkastellaan säännöllistä oktaedria, jonka särmän pituus on 1. Asetetaan yksi kärki origoon, toinen pisteeseen $(1, 0, 0)$, kolmas pisteeseen $(0, 1, 0)$. Nyt kaksi kärkeä ovat pisteissä $(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$ ja $(1/2, 1/2, -1/\sqrt{2})$.

Oktaedrin origosta lähteviä särmiä esittävät vektorit

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0),$$

$$\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0),$$

$$\mathbf{u}_3 = (1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}) \approx (0.5, 0.5, 0.707),$$

$$\mathbf{u}_4 = (1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}) \approx (0.5, 0.5, -0.707).$$

Esimerkki

Tarkastellaan säännöllistä dodekaedria, jonka särmän pituus on 1. Olkoon dodekaedrin särmien välinen kulma α ja tämän vieruskulma β . Koska $5\beta = 360^\circ$, niin $\beta = 72^\circ$. Siis $\alpha = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$. Nyt $\alpha/2 = 54^\circ$ ja $\gamma = 90^\circ - \alpha/2 = 36^\circ$.

Asetetaan dodekaedrin yksi kärki origoon ja kaksi muuta pisteisiin $\mathbf{u} = (\cos \gamma, \sin \gamma, 0)$ sekä $\mathbf{v} = (-\cos \gamma, \sin \gamma, 0)$. Sijaitkoon dodekaedri xy -tason päällä, jolloin dodekaedrin yksi kärki sijaitsee pisteessä $\mathbf{w} = (0, a, b)$. Nyt

$$\cos 108^\circ = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{u}||\mathbf{w}|} = a \sin \gamma,$$

$$a = \frac{\cos 108^\circ}{\sin \gamma} = \frac{\cos 108^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \approx 0.5257,$$

$$b = \sqrt{1 - a^2} = \dots = \frac{2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \approx 0.8507.$$

Esimerkki (jatkuu)

Dodekaedrin origosta lähteviä särmiä esittävät vektorit

$$\mathbf{u} = (\cos 36^\circ, \sin 36^\circ, 0) \approx (0.809, 0.588, 0),$$

$$\mathbf{v} = (-\cos 36^\circ, \sin 36^\circ, 0) \approx (-0.809, 0.588, 0),$$

$$\mathbf{w} \approx (0, 0.5257, 0.8507).$$

Esimerkki

Tarkastellaan säännöllistä viisikulmiota. Viisikulmion kärjen etäisyys b viisikulmion keskipisteestä toteuttaa

$$\cos 54^\circ = \frac{1/2}{b}, \quad b = \frac{1}{2 \cos 54^\circ} = \frac{2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \approx 0.8507.$$

Säännöllisen ikosaedrin huippu koostuu kartiosta, jonka pohja on viisikulmio. Pythagoraan lauseen nojalla, kartion korkeus on

$$a = \sqrt{1 - b^2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \approx 0.5257.$$

Esimerkki (jatkuu)

Tarkastellaan säännöllistä ikosaedria, jonka särmän pituus on 1. Asetetaan ikosaedri huippu alaspäin xy -tason päälle. Siis kaksi vastakkaista kärkeä ovat z -akselilla, näistä alempi on origossa ja yksi tätä lähin kärki on xz -tasossa. Ikosaedrin origosta lähteviä särmiä esittävät vektorit

$$\mathbf{u}_k = (b \cos n \cdot 72^\circ, b \sin n \cdot 72^\circ, a), \quad n = 0, 1, \dots, 4,$$

missä

$$a \approx 0.5257, \quad b \approx 0.8507.$$

Esimerkki (jatkuu)

Ikosaedrin origosta lähteviä särmää esittävät vektorit

$$\mathbf{u}_0 = (0.8507, 0, 0.5257),$$

$$\mathbf{u}_1 = (0.2629, 0.8091, 0.5257),$$

$$\mathbf{u}_2 = (-0.6882, 0.5000, 0.5257),$$

$$\mathbf{u}_3 = (-0.6882, -0.5000, 0.5257),$$

$$\mathbf{u}_4 = (0.2629, -0.8091, 0.5257).$$