

Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Jos on annettu avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektori, kuinka löydetään $n - 1$ tätä vastaan kohtisuorassa olevaa vektoria?

Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = (a, b)$ tason $\mathbb{R}^2$ vektori, jolle $|\mathbf{u}| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$.

Tällöin vektori

$$\mathbf{v} = (b, -a)$$

toteuttaa

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad |\mathbf{v}| \neq 0.$$

Tarkistus.

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = (b, -a) \cdot (a, b) = b \cdot a + (-a) \cdot b = 0.$$

Lisäksi

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{b^2 + a^2} = |\mathbf{u}| \neq 0.$$

Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = (a, b, c)$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektori, jolle $|\mathbf{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \neq 0$.

Tällöin vektori

$$\mathbf{v} = (b - c, c - a, a - b)$$

toteuttaa

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Tarkistus.

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = ab - ac + bc - ba + ca - cb = 0.$$

Huomautus

Jos $a = b = c$, niin $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = (a, b, c)$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektori, jolle $|\mathbf{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \neq 0$.

Tällöin vektorit

$$\mathbf{v}_0 = (b - c, c - a, a - b)$$

$$\mathbf{v}_1 = (-b + c, c + a, -a - b)$$

$$\mathbf{v}_2 = (-b - c, -c + a, a + b)$$

$$\mathbf{v}_3 = (b + c, -c - a, -a + b)$$

toteuttavat $\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{u} = 0$ kaikilla $j = 0, 1, 2, 3$.

Tarkistus. Kuten aiemmin

$$\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{u} = ab - ac + bc - ba + ca - cb = 0$$

Vaihtamalla $a \rightarrow -a$, pistetulo on edelleen nolla. Voidaan ajatella, että vasemmalla puolella vektori $\mathbf{u}$ pysyy entisellään ja $\mathbf{v}_0$ muuttuu vektoriksi $\mathbf{v}_1$. Siis $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u} = 0$. Loput tapaukset voidaan päätellä vastaavasti.

Huomautus

Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}$ siten, että $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Olkoot

$$\mathbf{v}_0 = (b - c, c - a, a - b)$$

$$\mathbf{v}_1 = (-b + c, c + a, -a - b)$$

$$\mathbf{v}_2 = (-b - c, -c + a, a + b)$$

$$\mathbf{v}_3 = (b + c, -c - a, -a + b).$$

Tällöin $\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. Lisäksi enintään kaksi vektoreista on yhdensuuntaisia.

Tarkistus. Ensimmäinen väite on selvä.

Oletetaan esimerkiksi $\mathbf{v}_0 = t\mathbf{v}_1 = s\mathbf{v}_2$ jollakin $t, s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Joko $t = -1$ tai $b - c = 0$. Lisäksi, joko $s = -1$ tai $c - a = 0$. Kaikissa tapauksissa saadaan lopulta $a = b = c = 0$.

Johdetaan yleinen kaava avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Merkitään $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ja

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) = (x_2 - x_3, x_3 - x_1, x_1 - x_2).$$

Nähdään, että

$$y_k = \sum_{j=1}^n A_{k,j} x_j, \quad A_{k,j} = \begin{cases} (-1)^{k+j}, & 1 \leq j \leq k-1, \\ 0, & j = k, \\ (-1)^{k+j+1}, & k+1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Tämä osoittautuu oikeaksi muotoiluksi termille y_k . Merkitään vielä $B_{k,j} = 1$, kun $k \neq j$ ja $B_{k,j} = -1$, kun $k = j$.

Lause

Olkoon $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Asetetaan

$$A_{k,j} = \begin{cases} (-1)^{k+j}, & 1 \leq j \leq k-1, \\ 0, & j = k, \\ (-1)^{k+j+1}, & k+1 \leq j \leq n. \end{cases}, \quad B_{m,k} = \begin{cases} 1, & k \neq m, \\ -1, & k = m. \end{cases}$$

(i) Vektorit $\mathbf{y}_m = ((y_m)_1, \dots, (y_m)_n)$, missä

$$(y_m)_k = B_{m,k} \sum_{j=1}^n A_{k,j} B_{m,j} x_j,$$

toteuttavat $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_m = 0$, kaikilla $m = 0, \dots, n$.

(ii) Jos n on pariton, pätee $\sum_{m=0}^n \mathbf{y}_m = \mathbf{0}$. Jos n on parillinen, pätee $\sum_{m=1}^n \mathbf{y}_m = \mathbf{0}$. Lisäksi enintään kaksi vektoreista $\mathbf{y}_j$ on yhdensuuntaisia.

Todistus

Kohta (ii) päätellään analogisesti kuten aiemmin esitetyn esimerkin tapauksessa.

Nähdään, että

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_m = \sum_{k=1}^n B_{m,k} x_k \sum_{j=1}^n A_{k,j} B_{m,j} x_j = \tilde{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}_0,$$

missä $\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k$, kun $k \neq m$ ja $\tilde{\mathbf{x}}_k = -\mathbf{x}_k$, kun $k = m$. Riittää siis osoittaa, että $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_0 = 0$.

Todistus.

Nyt

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_0 = \sum_{k=1}^n x_k y_k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n A_{k,j} x_k x_j.$$

Indekseillä $k = j = t$ summaan saadaan termi $A_{t,t} x_t x_t = 0$. Siis termejä x_t^2 ei esiinny summassa. Olkoon $t < s$. Indekseillä $k = t, j = s$ summaan saadaan termi

$$A_{t,s} x_t x_s \stackrel{t \leq s}{=} (-1)^{s+t} x_t x_s.$$

Indekseillä $k = s, j = t$ summaan saadaan termi

$$A_{s,t} x_s x_t \stackrel{t \leq s}{=} (-1)^{s+t+1} x_s x_t.$$

Mainitut kaksi termiä kumoutuvat. Siis $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_0 = 0$.



Esimerkki

Olkoon $\mathbf{x} = (1, 5, 17, 31)$. Etsitään ainakin neljä vektoria $\mathbf{x}$ vastaan kohtisuoraa vektoria. Lauseen nojalla yksi tällainen vektori on

$$\mathbf{y}_0 = (5 - 17 + 31, -(1 - 17 + 31), 1 - 5 + 31, -(1 - 5 + 17)) = (19, -15, 27, -13).$$

Loput saadaan vaihtamalla jonkin luvun x_j merkki ja komponentin $(\mathbf{y}_0)_j$ merkki. Luvun x_j merkin vaihtaminen tuottaa muutoksen $\pm 2x_j$. Siis

$$\mathbf{y}_1 = (-19, -15 + 2, 27 - 2, -13 + 2) = (-19, -13, 25, -11),$$

$$\mathbf{y}_2 = (19 - 10, 15, 27 + 10, -13 - 10) = (9, 15, 37, -23),$$

$$\mathbf{y}_3 = (19 + 34, -15 - 34, -27, -13 + 34) = (53, -49, -27, 21),$$

$$\mathbf{y}_4 = (19 - 62, -15 + 62, 27 - 62, 13) = (-43, 47, -35, 13).$$

$$\text{Nyt } \sum_{m=1}^4 \mathbf{y}_m = \mathbf{0}.$$

Esimerkki

Tuotetaan edellinen esimerkki Octave-koodilla. Nyt $n = N = 4$.

$$A_{k,j} = \begin{cases} (-1)^{k+j}, & 1 \leq j \leq k-1, \\ 0, & j = k, \\ (-1)^{k+j+1}, & k+1 \leq j \leq n, \end{cases}$$

saadaan koodilla

```
N=4;A=ones(N);  
for k=1:N  
for j=1:N  
if j<k, A(k,j)=(-1)^(k+j);  
elseif j==k, A(k,j)=0;  
else A(k,j)=(-1)^(k+j+1);  
end  
end  
end
```

Esimerkki (jatkuu)

Toisaalta

$$B_{k,j} = \begin{cases} 1, & k \neq j, \\ -1, & k = j, \end{cases}$$

saadaan koodilla

```
B=ones(N+1,N);  
for k=1:N+1  
  for j=1:N  
    if k==j, B(k,j)=-1;  
  end  
end  
end
```

Esimerkki (jatkuu)

Lopuksi voidaan antaa vektori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ ja generoida vektorit $\mathbf{y}_m$. Kaavaa

$$(y_m)_k = B_{m,k} \sum_{j=1}^n A_{k,j} B_{m,j} x_j,$$

vastaa koodi

```
x=[1 5 17 31];y=zeros(N+1,N);  
for m=1:N+1  
for k=1:N  
yy=0;  
for j=1:N  
yy=yy+A(k,j)*B(m,j)*x(j);  
end  
y(m,k)=B(m,k)*yy;  
end  
end
```

Esimerkki (jatkuu)

Ajamalla koodi Octave Onlinessa saadaan

$y =$

```
-19  -13   25  -11  
  9   15   37  -23  
 53  -49  -27   21  
-43   47  -35   13  
 19  -15   27  -13
```