

Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Määritelmä

Olkoot $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita. Olkoon $\mathbf{w}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektori siten, että

- (a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$ ja $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$,
- (b) $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$, missä θ on vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ välinen kulma,
- (c) järjestetty kolmikko $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ on positiivisesti suunnistettu (oikean käden systeemi).

Tällöin $\mathbf{w}$ on vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ **ristitulo** ja merkitään $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Huomautus

Olkoot $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita ja olkoon θ niiden välinen kulma.

Huomautus

Olkoot $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita ja olkoon θ niiden välinen kulma.

Määritelmän mukaan $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$.

Huomautus

Olkoot $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita ja olkoon θ niiden välinen kulma.

Määritelmän mukaan $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$.

Siis $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$, jos ja vain jos jompikumpi on nollavektori tai $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat yhdensuuntaiset.

Huomautus

Olkoot $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita ja olkoon θ niiden välinen kulma.

Määritelmän mukaan $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$.

Siis $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$, jos ja vain jos jompikumpi on nollavektori tai $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat yhdensuuntaiset.

Vastaavasti määritelmän mukaan $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta$.

Huomautus

Olkoot $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita ja olkoon θ niiden välinen kulma.

Määritelmän mukaan $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$.

Siis $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$, jos ja vain jos jompikumpi on nollavektori tai $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat yhdensuuntaiset.

Vastaavasti määritelmän mukaan $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta$.

Siis $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, jos ja vain jos jompikumpi on nollavektori tai $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat kohtisuorat.

Lause

Olkoot $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ vektoreita avaruudessa $\mathbb{R}^3$ ja t skalaari. Tällöin on voimassa

- (a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u}),$
- (b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w},$
- (c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w},$
- (d) $t(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (t\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (t\mathbf{v}),$
- (e) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0},$
- (f) $\mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0},$
- (g) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w},$
- (h) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u},$
- (i) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}$

Lause

Olkoot $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ vektoreita avaruudessa $\mathbb{R}^3$ ja t skalaari. Tällöin on voimassa

- (a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$, OK, antivaihdannaisuus, ristitulon määritelmä
- (b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$,
- (c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$,
- (d) $t(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (t\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (t\mathbf{v})$,
- (e) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$,
- (f) $\mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$,
- (g) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$,
- (h) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$,
- (i) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$

Lause

Olkoot $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ vektoreita avaruudessa $\mathbb{R}^3$ ja t skalaari. Tällöin on voimassa

- (a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$, OK, antivaihdannaisuus, ristitulon määritelmä
- (b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$, osittelulaki vasemmalta, **todistetaan**
- (c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$, osittelulaki oikealta
- (d) $t(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (t\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (t\mathbf{v})$,
- (e) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$,
- (f) $\mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$,
- (g) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$,
- (h) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$,
- (i) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$

Lause

Olkoot $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ vektoreita avaruudessa $\mathbb{R}^3$ ja t skalaari. Tällöin on voimassa

- (a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$, OK, antivaihdannaisuus, ristitulon määritelmä
- (b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$, osittelulaki vasemmalta, **todistetaan**
- (c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$, OK, seuraa kohdista (a) ja (b)
- (d) $t(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (t\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (t\mathbf{v})$,
- (e) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$,
- (f) $\mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$,
- (g) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$,
- (h) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$,
- (i) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$

Lause

Olkoot $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ vektoreita avaruudessa $\mathbb{R}^3$ ja t skalaari. Tällöin on voimassa

- (a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$, OK, antivaihdannaisuus, ristitulon määritelmä
- (b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$, osittelulaki vasemmalta, **todistetaan**
- (c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$, OK, seuraa kohdista (a) ja (b)
- (d) $t(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (t\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (t\mathbf{v})$, OK, $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$
- (e) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$,
- (f) $\mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$,
- (g) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$,
- (h) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$,
- (i) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$

Lause

Olkoot $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ vektoreita avaruudessa $\mathbb{R}^3$ ja t skalaari. Tällöin on voimassa

- (a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$, OK, antivaihdannaisuus, ristitulon määritelmä
- (b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$, osittelulaki vasemmalta, **todistetaan**
- (c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$, OK, seuraa kohdista (a) ja (b)
- (d) $t(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (t\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (t\mathbf{v})$, OK, $|t\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |t\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$
- (e) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$,
- (f) $\mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$,
- (g) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$,
- (h) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$,
- (i) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$

Lause

Olkoot $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ vektoreita avaruudessa $\mathbb{R}^3$ ja t skalaari. Tällöin on voimassa

- (a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$, OK, antivaihdannaisuus, ristitulon määritelmä
- (b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$, osittelulaki vasemmalta, **todistetaan**
- (c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$, OK, seuraa kohdista (a) ja (b)
- (d) $t(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (t\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (t\mathbf{v})$, OK, $|t\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||t\mathbf{v}| \sin \theta$
- (e) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$,
- (f) $\mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$,
- (g) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$,
- (h) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$,
- (i) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$

Lause

Olkoot $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ vektoreita avaruudessa $\mathbb{R}^3$ ja t skalaari. Tällöin on voimassa

- (a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$, OK, antivaihdannaisuus, ristitulon määritelmä
- (b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$, osittelulaki vasemmalta, **todistetaan**
- (c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$, OK, seuraa kohdista (a) ja (b)
- (d) $t(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (t\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (t\mathbf{v})$, OK, $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$
- (e) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$, OK, $|\mathbf{u} \times \mathbf{u}| = |\mathbf{u}||\mathbf{u}| \sin 0 = 0$
- (f) $\mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$,
- (g) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$,
- (h) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$,
- (i) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$

Lause

Olkoot $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ vektoreita avaruudessa $\mathbb{R}^3$ ja t skalaari. Tällöin on voimassa

- (a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$, OK, antivaihdannaisuus, ristitulon määritelmä
- (b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$, osittelulaki vasemmalta, **todistetaan**
- (c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$, OK, seuraa kohdista (a) ja (b)
- (d) $t(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (t\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (t\mathbf{v})$, OK, $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$
- (e) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$, OK, $|\mathbf{u} \times \mathbf{u}| = |\mathbf{u}||\mathbf{u}| \sin 0 = 0$
- (f) $\mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$, OK, $|\mathbf{0} \times \mathbf{u}| = |0||\mathbf{u}| \sin \theta = 0$
- (g) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$,
- (h) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$,
- (i) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$

Lause

Olkoot $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ vektoreita avaruudessa $\mathbb{R}^3$ ja t skalaari. Tällöin on voimassa

- (a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$, OK, antivaihdannaisuus, ristitulon määritelmä
- (b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$, osittelulaki vasemmalta, **todistetaan**
- (c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$, OK, seuraa kohdista (a) ja (b)
- (d) $t(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (t\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (t\mathbf{v})$, OK, $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$
- (e) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$, OK, $|\mathbf{u} \times \mathbf{u}| = |\mathbf{u}||\mathbf{u}| \sin 0 = 0$
- (f) $\mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$, OK, $|\mathbf{0} \times \mathbf{u}| = |0||\mathbf{u}| \sin \theta = 0$
- (g) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$, Lagrangen kolmitulokaava...
- (h) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$,
- (i) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$

Lause

Olkoot $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ vektoreita avaruudessa $\mathbb{R}^3$ ja t skalaari. Tällöin on voimassa

- (a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$, OK, antivaihdannaisuus, ristitulon määritelmä
- (b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$, osittelulaki vasemmalta, **todistetaan**
- (c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$, OK, seuraa kohdista (a) ja (b)
- (d) $t(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (t\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (t\mathbf{v})$, OK, $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$
- (e) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$, OK, $|\mathbf{u} \times \mathbf{u}| = |\mathbf{u}||\mathbf{u}| \sin 0 = 0$
- (f) $\mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$, OK, $|\mathbf{0} \times \mathbf{u}| = |0||\mathbf{u}| \sin \theta = 0$
- (g) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$, Lagrangen kolmitulokaava...
- (h) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$, OK, seuraa kohdista (a) ja (g)
- (i) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$

Lause

Olkoot $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ vektoreita avaruudessa $\mathbb{R}^3$ ja t skalaari. Tällöin on voimassa

- (a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$, OK, antivaihdannaisuus, ristitulon määritelmä
- (b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$, osittelulaki vasemmalta, **todistetaan**
- (c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$, OK, seuraa kohdista (a) ja (b)
- (d) $t(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (t\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (t\mathbf{v})$, OK, $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$
- (e) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$, OK, $|\mathbf{u} \times \mathbf{u}| = |\mathbf{u}||\mathbf{u}| \sin 0 = 0$
- (f) $\mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$, OK, $|\mathbf{0} \times \mathbf{u}| = |0||\mathbf{u}| \sin \theta = 0$
- (g) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$, Lagrangen kolmitulokaava...
- (h) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$, OK, seuraa kohdista (a) ja (g)
- (i) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$ = suuntaissärmiön tilavuus...

Lause

Olkoot $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ vektoreita avaruudessa $\mathbb{R}^3$ ja t skalaari. Tällöin on voimassa

- (a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u}),$
- (b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w},$ osittelulaki vasemmalta, **todistetaan**
- (c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w},$
- (d) $t(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (t\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (t\mathbf{v}),$
- (e) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0},$
- (f) $\mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0},$
- (g) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w},$
- (h) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u},$
- (i) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}$

Todistus. Todistetaan kohta (b).

Osoitetaan siis, että $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$. Tarkastellaan aluksi vektorin $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ ensimmäistä eli $\mathbf{i}$ -komponenttia.

Osoitetaan siis, että $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$. Tarkastellaan aluksi vektorin $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ ensimmäistä eli i -komponenttia. Saadaan

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}))_1 &= u_2(\mathbf{v} + \mathbf{w})_3 - u_3(\mathbf{v} + \mathbf{w})_2 \\ &= u_2(v_3 + w_3) - u_3(v_2 + w_2)\end{aligned}$$

Osoitetaan siis, että $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$. Tarkastellaan aluksi vektorin $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ ensimmäistä eli i -komponenttia. Saadaan

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}))_1 &= u_2(\mathbf{v} + \mathbf{w})_3 - u_3(\mathbf{v} + \mathbf{w})_2 \\&= u_2(v_3 + w_3) - u_3(v_2 + w_2) \\&= (u_2 v_3 - u_3 v_2) + (u_2 w_3 - u_3 w_2)\end{aligned}$$

Osoitetaan siis, että $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$. Tarkastellaan aluksi vektorin $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ ensimmäistä eli i -komponenttia. Saadaan

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}))_1 &= u_2(\mathbf{v} + \mathbf{w})_3 - u_3(\mathbf{v} + \mathbf{w})_2 \\&= u_2(v_3 + w_3) - u_3(v_2 + w_2) \\&= (u_2 v_3 - u_3 v_2) + (u_2 w_3 - u_3 w_2) \\&= (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_1 + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})_1\end{aligned}$$

Osoitetaan siis, että $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$. Tarkastellaan aluksi vektorin $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ ensimmäistä eli i -komponenttia. Saadaan

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}))_1 &= u_2(\mathbf{v} + \mathbf{w})_3 - u_3(\mathbf{v} + \mathbf{w})_2 \\&= u_2(v_3 + w_3) - u_3(v_2 + w_2) \\&= (u_2 v_3 - u_3 v_2) + (u_2 w_3 - u_3 w_2) \\&= (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_1 + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})_1\end{aligned}$$

Siis vektoreilla $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ ja $\mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ on yhtä suuri i -komponentti. Vastaavasti j - ja k -komponentit ovat yhtä suuret.

Osoitetaan siis, että $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$. Tarkastellaan aluksi vektorin $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ ensimmäistä eli $\mathbf{i}$ -komponenttia. Saadaan

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}))_1 &= u_2(\mathbf{v} + \mathbf{w})_3 - u_3(\mathbf{v} + \mathbf{w})_2 \\&= u_2(v_3 + w_3) - u_3(v_2 + w_2) \\&= (u_2v_3 - u_3v_2) + (u_2w_3 - u_3w_2) \\&= (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_1 + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})_1\end{aligned}$$

Siis vektoreilla $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ ja $\mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ on yhtä suuri $\mathbf{i}$ -komponentti. Vastaavasti $\mathbf{j}$ - ja $\mathbf{k}$ -komponentit ovat yhtä suuret. Väite seuraa. □

Johdettujen ominaisuuksien avulla voidaan osoittaa muita kaavoja.

Johdettujen ominaisuuksien avulla voidaan osoittaa muita kaavoja.

Esimerkki

Osoitetaan, että

$$(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \times (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mathbf{w} \times \mathbf{u}.$$

Johdettujen ominaisuuksien avulla voidaan osoittaa muita kaavoja.

Esimerkki

Osoitetaan, että

$$(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \times (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mathbf{w} \times \mathbf{u}.$$

Aluksi osittelulakien nojalla, sekoittamatta tekijöiden järjestyksiä, saadaan

$$(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \times (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} - \mathbf{u} \times \mathbf{w} - \mathbf{w} \times \mathbf{v} + \mathbf{w} \times \mathbf{w}.$$

Johdettujen ominaisuuksien avulla voidaan osoittaa muita kaavoja.

Esimerkki

Osoitetaan, että

$$(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \times (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mathbf{w} \times \mathbf{u}.$$

Aluksi osittelulakien nojalla, sekoittamatta tekijöiden järjestyksiä, saadaan

$$(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \times (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} - \mathbf{u} \times \mathbf{w} - \mathbf{w} \times \mathbf{v} + \mathbf{w} \times \mathbf{w}.$$

Koska $\mathbf{w}$ on yhdensuuntainen itsensä kanssa, pätee $\mathbf{w} \times \mathbf{w} = 0$ ja siis

$$(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \times (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} - \mathbf{u} \times \mathbf{w} - \mathbf{w} \times \mathbf{v}.$$

Johdettujen ominaisuuksien avulla voidaan osoittaa muita kaavoja.

Esimerkki

Osoitetaan, että

$$(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \times (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mathbf{w} \times \mathbf{u}.$$

Aluksi osittelulakien nojalla, sekoittamatta tekijöiden järjestyksiä, saadaan

$$(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \times (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} - \mathbf{u} \times \mathbf{w} - \mathbf{w} \times \mathbf{v} + \mathbf{w} \times \mathbf{w}.$$

Koska $\mathbf{w}$ on yhdensuuntainen itsensä kanssa, pätee $\mathbf{w} \times \mathbf{w} = 0$ ja siis

$$(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \times (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} - \mathbf{u} \times \mathbf{w} - \mathbf{w} \times \mathbf{v}.$$

Edelleen $-\mathbf{u} \times \mathbf{w} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$ ja $-\mathbf{w} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Siis

$$(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \times (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mathbf{w} \times \mathbf{u}.$$