

Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Taso tunnetaan, jos tiedetään

Taso tunnetaan, jos tiedetään

(i) tason kolme pistettä

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$
- (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä (eivät saa olla samalla suoralla)
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$
- (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä (eivät saa olla samalla suoralla)
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria (eivät saa olla yhdensuuntaisia)
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$
- (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä (eivät saa olla samalla suoralla)
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria (eivät saa olla yhdensuuntaisia)
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)
- (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä (eivät saa olla samalla suoralla)
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria (eivät saa olla yhdensuuntaisia)
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)
- (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä (eivät saa olla samalla suoralla)
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria (eivät saa olla yhdensuuntaisia)
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)
- (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)

Tiedot (i)–(iv) ovat siinä järjestyksessä että, jos yksi tiedetään, seuraava on helppo johtaa. On siis helppoa edetä $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$.

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä (eivät saa olla samalla suoralla)
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria (eivät saa olla yhdensuuntaisia)
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)
- (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)

Tiedot (i)–(iv) ovat siinä järjestyksessä että, jos yksi tiedetään, seuraava on helppo johtaa. On siis helppoa edetä $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$.

Esimerkki (tiedosta (i) tieto (ii))

Taso kulkee pisteiden $p = (1, 1, 1)$, $q = (2, 4, 4)$ ja $r = (6, 0, 0)$ kautta. Miten löydetään tasolle kaksi suuntavektoria?

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä (eivät saa olla samalla suoralla)
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria (eivät saa olla yhdensuuntaisia)
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)
- (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)

Tiedot (i)–(iv) ovat siinä järjestyksessä että, jos yksi tiedetään, seuraava on helppo johtaa. On siis helppoa edetä $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$.

Esimerkki (tiedosta (i) tieto (ii))

Taso kulkee pisteiden $p = (1, 1, 1)$, $q = (2, 4, 4)$ ja $r = (6, 0, 0)$ kautta. Miten löydetään tasolle kaksi suuntavektoria?

Eräs suuntavektori on $\mathbf{u} = q - p = (2, 4, 4) - (1, 1, 1) = (1, 3, 3)$.

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä (eivät saa olla samalla suoralla)
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria (eivät saa olla yhdensuuntaisia)
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)
- (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)

Tiedot (i)–(iv) ovat siinä järjestyksessä että, jos yksi tiedetään, seuraava on helppo johtaa. On siis helppoa edetä $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$.

Esimerkki (tiedosta (i) tieto (ii))

Taso kulkee pisteiden $p = (1, 1, 1)$, $q = (2, 4, 4)$ ja $r = (6, 0, 0)$ kautta. Miten löydetään tasolle kaksi suuntavektoria?

Eräs suuntavektori on $\mathbf{u} = q - p = (2, 4, 4) - (1, 1, 1) = (1, 3, 3)$.

Toinen suuntavektori on $\mathbf{v} = r - p = (6, 0, 0) - (1, 1, 1) = (5, -1, -1)$.

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä (eivät saa olla samalla suoralla)
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria (eivät saa olla yhdensuuntaisia)
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)
- (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)

Tiedot (i)–(iv) ovat siinä järjestyksessä että, jos yksi tiedetään, seuraava on helppo johtaa. On siis helppoa edetä $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$.

Esimerkki (tiedosta (i) tieto (ii))

Taso kulkee pisteiden $p = (1, 1, 1)$, $q = (2, 4, 4)$ ja $r = (6, 0, 0)$ kautta. Miten löydetään tasolle kaksi suuntavektoria?

Eräs suuntavektori on $\mathbf{u} = q - p = (2, 4, 4) - (1, 1, 1) = (1, 3, 3)$.

Toinen suuntavektori on $\mathbf{v} = r - p = (6, 0, 0) - (1, 1, 1) = (5, -1, -1)$.

Kyseessä on taso, joka kulkee pisteen $p = (1, 1, 1)$ kautta ja jolla on suuntavektorit $\mathbf{u} = (1, 3, 3)$ ja $\mathbf{v} = (5, -1, -1)$.

Lause

Tasosta tiedetään jokin seuraavista ehdoista.

- (i) tason kolme pistettä (eivät ole samalla suoralla),*
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria (eivät ole yhdensuuntaisia),*
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$ (ei päde $a = b = c = 0$),*
- (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$ (ei päde $a = b = c = 0$).*

Tällöin voidaan tehdä johdot $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$.

Todistus.

Todistus. [(i)] Oletetaan, että tasossa on pisteet p, q, r , jotka eivät ole samalla suoralla.

Todistus. [(i)] Oletetaan, että tasossa on pisteet p, q, r , jotka eivät ole samalla suoralla.

[(i) $\Rightarrow$ (ii)] Valitsemalla $\mathbf{u} = q - p$ ja $\mathbf{v} = r - p$,

Todistus. [(i)] Oletetaan, että tasossa on pisteet p, q, r , jotka eivät ole samalla suoralla.

[(i) $\Rightarrow$ (ii)] Valitsemalla $\mathbf{u} = q - p$ ja $\mathbf{v} = r - p$, saadaan tasolle esitys

$$p + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Todistus. [(i)] Oletetaan, että tasossa on pisteet p, q, r , jotka eivät ole samalla suoralla.

[(i) $\Rightarrow$ (ii)] Valitsemalla $\mathbf{u} = q - p$ ja $\mathbf{v} = r - p$, saadaan tasolle esitys

$$p + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

[(ii) $\Rightarrow$ (iii)] Valitsemalla normaaliksi $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, saadaan tason yhtälöksi

$$(X - p) \cdot \mathbf{n} = 0,$$

missä $X = (x, y, z)$.

Todistus. [(i)] Oletetaan, että tasossa on pisteet p, q, r , jotka eivät ole samalla suoralla.

[(i) $\Rightarrow$ (ii)] Valitsemalla $\mathbf{u} = q - p$ ja $\mathbf{v} = r - p$, saadaan tasolle esitys

$$p + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

[(ii) $\Rightarrow$ (iii)] Valitsemalla normaaliksi $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, saadaan tason yhtälöksi

$$(X - p) \cdot \mathbf{n} = 0,$$

missä $X = (x, y, z)$.

[(iii) $\Rightarrow$ (iv)] Asettamalla $p = (x_0, y_0, z_0)$ ja $\mathbf{n} = (a, b, c)$, yhtälö on

$$\begin{aligned}(X - p) \cdot \mathbf{n} &= ((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) \cdot (a, b, c) \\ &= (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0,\end{aligned}$$

eli

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Tiedetään (i) tason kolme pistettä

Halutaan (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria

Esimerkki

Taso kulkee pisteiden $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 4)$ ja $(-3, 2, 2)$ kautta. Esitetään taso parametrimuodossa.

Suuntavektoreiksi voidaan valita

$$\mathbf{u} = (2, 1, 4) - (1, 2, 3) = (1, -1, 1)$$

ja

$$\mathbf{v} = (-3, 2, 2) - (1, 2, 3) = (-4, 0, -1).$$

Selvästi $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ eivät ole yhdensuuntaisia.

Tason parametriesitys on

$$(2, 1, 4) + s(1, -1, 1) + t(-4, 0, -1), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Tiedetään (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria

Halutaan (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$

Esimerkki

Taso kulkee pisteen $(1, 1, 2)$ kautta ja tasolla on suuntavektorit $(1, 0, 3)$ ja $(2, -1, -1)$. Etsitään tason normaali sekä tason yhtälö.

Normaaliksi voidaan valita

$$\mathbf{n} = (1, 0, 3) \times (2, -1, -1) = (3, 7, -1).$$

Siis kyseessä on se yksikäsitteinen taso, joka kulkee pisteen $(1, 0, 3)$ kautta ja jolla on normaalina $(3, 7, -1)$.

Siis tason yhtälö on muotoa

$$((x, y, z) - (1, 1, 2)) \cdot (3, 7, -1) = 0.$$

Tiedetään (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$

Halutaan (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$

Esimerkki (jatkoa edelliselle esimerkille)

Taso kulkee pisteen $(1, 1, 2)$ kautta ja sillä on normaalina $(3, 7, -1)$.

Siis tason yhtälö on

$$\begin{aligned} & ((x, y, z) - (1, 1, 2)) \cdot (3, 7, -1) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x - 1, y - 1, z - 2) \cdot (3, 7, -1) = 0 \\ \Leftrightarrow & 3(x - 1) + 7(y - 1) - (z - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow & 3x - 3 + 7y - 7 - z + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow & 3x + 7y - z = 8. \end{aligned}$$