

Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Taso tunnetaan, jos tiedetään

Taso tunnetaan, jos tiedetään

(i) tason kolme pistettä

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$
- (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä (eivät saa olla samalla suoralla)
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$
- (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä (eivät saa olla samalla suoralla)
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria (eivät saa olla yhdensuuntaisia)
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$
- (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä (eivät saa olla samalla suoralla)
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria (eivät saa olla yhdensuuntaisia)
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)
- (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä (eivät saa olla samalla suoralla)
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria (eivät saa olla yhdensuuntaisia)
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)
- (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä (eivät saa olla samalla suoralla)
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria (eivät saa olla yhdensuuntaisia)
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)
- (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)

Tiedot (i)–(iv) ovat siinä järjestyksessä että, jos yksi tiedetään, seuraava on helppo johtaa. On siis helppoa edetä $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$.

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä (eivät saa olla samalla suoralla)
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria (eivät saa olla yhdensuuntaisia)
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)
- (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)

Tiedot (i)–(iv) ovat siinä järjestyksessä että, jos yksi tiedetään, seuraava on helppo johtaa. On siis helppoa edetä $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$.

Mutta, kuinka voidaan edetä toiseen suuntaan $(iv) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$?

Tiedetään (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$

Halutaan (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$

Lause

*Tason $ax + by + cz = d$, missä ei päde $a = b = c = 0$, normaali on $\mathbf{n} = (a, b, c)$.
Lisäksi piste*

$$(ad, bd, cd)T, \quad \text{missä} \quad T = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$$

kuuluu tasoon.

Todistus. Oletetaan, että $d \neq 0$. Tasoilla

$$ax + by + cz = d, \quad ax + by + cz = 0$$

ei ole yhteisiä pisteitä. Nimittäin, jos (x_0, y_0, z_0) kuuluisi kumpaankin tasoon, saataisiin

$$d = ax_0 + by_0 + cz_0 = 0,$$

mikä on ristiriita. Siis mainitut tasot

$$ax + by + cz = d, \quad ax + by + cz = 0$$

ovat yhdensuuntaisia. Siis niiden normaalit ovat yhdensuuntaisia.

Tulee siis osoittaa, että tason $ax + by + cz = 0$ eräs normaali on $\mathbf{n} = (a, b, c)$.
Selvästi $p = (0, 0, 0)$ kuuluu tasoon. Siis

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ \Leftrightarrow a(x - p_1) + b(y - p_2) + c(z - p_3) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - p_1, y - p_2, z - p_3) \cdot (a, b, c) &= 0. \end{aligned}$$

Selvästi (a, b, c) on tason normaali.

Halutaan osoittaa, että piste

$$(ad, bd, cd)T, \quad \text{missä} \quad T = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2},$$

kuuluu tasoon $ax + by + cz = d$. Sijoittamalla saadaan

$$\begin{aligned} a(adT) + b(bdT) + c(cdT) &= d \\ \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)dT &= d \\ \Leftrightarrow \frac{(a^2 + b^2 + c^2)d}{a^2 + b^2 + c^2} &= d, \end{aligned}$$

mikä on selvästi totta. □

Huomautus

Nähtiin, että piste

$$(ad, bd, cd)T, \quad \text{missä} \quad T = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2},$$

kuuluu aina tasoon $ax + by + cz = d$. Piste on muotoa

$$(ad, bd, cd)T = (a, b, c)dT = (0, 0, 0) + t(a, b, c),$$

missä $t = dT$. Siis piste on origon kautta kulkevalla tason normaalisuoralla

$$(0, 0, 0) + t(a, b, c), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Siis tason $ax + by + cz = d$ origoa lähin piste on

$$(ad, bd, cd)T, \quad \text{missä} \quad T = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Seuraus

Tason $ax + by + cz = d$ origoa lähin piste on

$$(ad, bd, cd)T, \quad \text{missä} \quad T = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Esimerkki

Tason $ax + by + cz = 0$ origoa lähin piste on

$$(a \cdot 0, b \cdot 0, c \cdot 0)T = (0, 0, 0).$$

Esimerkki

Tason $2x - 3y + 5z = 7$ origoa lähin piste on

$$(2 \cdot 7, -3 \cdot 7, 5 \cdot 3) \frac{1}{2^2 + (-3)^2 + 5^2} = \frac{1}{38}(14, -21, 35) = \left(\frac{14}{38}, -\frac{21}{38}, \frac{35}{38}\right).$$

Esimerkki

Tason $x - y + 2z = 7$ eräs normaali on $\mathbf{n} = (1, -1, 2)$. Nyt $|\mathbf{n}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$ ja $T = \frac{1}{|\mathbf{n}|^2} = \frac{1}{6}$. Nyt piste

$$(ad, bd, cd)T = \frac{1}{6}(7, -7, 14) = \left(\frac{7}{6}, -\frac{7}{6}, \frac{14}{6}\right).$$

on annetussa tasossa.

Tarkistus. Sijoitetaan

$$(x, y, z) = \left(\frac{7}{6}, -\frac{7}{6}, \frac{14}{6}\right)$$

lausekkeeseen $x - y + 2z$, jolloin saadaan

$$x - y + 2z = \frac{7}{6} + (-1)\frac{7}{6} + 2\frac{14}{6} = \frac{7 + 7 + 28}{6} = \frac{42}{6} = 7.$$

Siis piste $\left(\frac{7}{6}, -\frac{7}{6}, \frac{14}{6}\right)$ on tasossa $x - y + 2z = 7$.

Tiedetään (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$

Halutaan (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria

Esimerkki

Pisteen $(1, 2, 2)$ kautta kulkevan tason normaali on $\mathbf{n} = (1, 0, -1)$. Halutaan esittää taso muodossa

$$(1, 2, 2) + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Täytyy siis löytää vain jotkut vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$, joille $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ ja $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$. Huomataan, että voidaan valita $\mathbf{u} = (0, 1, 0)$ ja $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$. Tason parametriesitys on

$$(1, 2, 2) + t(0, 1, 0) + s(1, 0, 1), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Voitaisiin myös valita $\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{n}$.

Tiedetään (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$

Halutaan (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria

Esimerkki

Pisteen (p_1, p_2) kautta kulkevan, vektoria (a, b) vastaan kohtisuoran suoran parametriesitys on

$$(p_1, p_2) + t(b, -a), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nyt vektoria (b, a) vastaan kohtisuora vektori $(b, -a)$ löydettiin “arvaamalla”.

Voitaisiinko vektoria (a, b, c) vastaan kohtisuora vektori löytää arvaamalla? Eräs tällainen vektori olisi $\mathbf{u} = (bc, ac, -2ab)$. Mutta jos $(a, b, c) = (1, 0, 0)$, niin $\mathbf{u} = (0, 0, 0)$, mikä ei kiinnosta. Koska vektoria $\mathbf{u}$ halutaan suuntavektorina, vektori $\mathbf{u}$ ei saa olla nollavektori.

Tiedetään (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$

Halutaan (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria

Lause

Tason $(a, b, c)((x, y, z) - p)$ suuntavektoreiksi voidaan valita kaksi vektoreista

$$\mathbf{u}_1 = (b - c, c - a, a - b)$$

$$\mathbf{u}_2 = (c - b, c + a, -(a + b))$$

$$\mathbf{u}_3 = -(b + c), a - c, a + b)$$

$$\mathbf{u}_4 = (b + c, -(a + c), b - a).$$

Siis vektoreista $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_4$ löytyy kaksi ei-yhdensuuntaista ei-nollavektoria.

Todistus.

Nähdään, että ehdosta $\mathbf{u}_j = t\mathbf{u}_k, j \neq k$, seuraa $t = \pm 1$. Ehdosta $\mathbf{u}_j = t\mathbf{u}_k = s\mathbf{u}_l$, missä $t = \pm 1, s = \pm 1$, seuraa $a = b = c = 0$, mikä on ristiriita. □

Tiedetään (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria

Halutaan (i) tason kolme pistettä

Lause

Tason

$$p + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

kolme pistettä p, q, r voidaan valita $q = p + \mathbf{u}$ ja $r = p + \mathbf{v}$. Tällöin p, q, r eivät ole samalla suoralla.

Todistus.

Ohitetaan. ☐

Taso tunnetaan, jos tiedetään

Edellisten lauseiden perusteella, voidaan aina edetä $(iv) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$.
Yleisten kaavojen johtaminen on hankalaa.

Taso tunnetaan, jos tiedetään

(i) tason kolme pistettä

Edellisten lauseiden perusteella, voidaan aina edetä $(iv) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$.
Yleisten kaavojen johtaminen on hankalaa.

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria

Edellisten lauseiden perusteella, voidaan aina edetä $(iv) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$.
Yleisten kaavojen johtaminen on hankalaa.

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$

Edellisten lauseiden perusteella, voidaan aina edetä $(iv) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$.
Yleisten kaavojen johtaminen on hankalaa.

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$
- (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$

Edellisten lauseiden perusteella, voidaan aina edetä $(iv) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$.
Yleisten kaavojen johtaminen on hankalaa.

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä (eivät saa olla samalla suoralla)
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$
- (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$

Edellisten lauseiden perusteella, voidaan aina edetä $(iv) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$.
Yleisten kaavojen johtaminen on hankalaa.

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä (eivät saa olla samalla suoralla)
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria (eivät saa olla yhdensuuntaisia)
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$
- (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$

Edellisten lauseiden perusteella, voidaan aina edetä $(iv) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$.
Yleisten kaavojen johtaminen on hankalaa.

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä (eivät saa olla samalla suoralla)
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria (eivät saa olla yhdensuuntaisia)
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)
- (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$

Edellisten lauseiden perusteella, voidaan aina edetä $(iv) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$.
Yleisten kaavojen johtaminen on hankalaa.

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä (eivät saa olla samalla suoralla)
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria (eivät saa olla yhdensuuntaisia)
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)
- (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)

Edellisten lauseiden perusteella, voidaan aina edetä $(iv) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$.
Yleisten kaavojen johtaminen on hankalaa.

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä (eivät saa olla samalla suoralla)
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria (eivät saa olla yhdensuuntaisia)
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)
- (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)

Tiedot (i)–(iv) ovat siinä järjestyksessä että, jos yksi tiedetään, seuraava on helppo johtaa. On siis helppoa edetä (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv).

Edellisten lauseiden perusteella, voidaan aina edetä (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i).

Yleisten kaavojen johtaminen on hankalaa.

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä (eivät saa olla samalla suoralla)
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria (eivät saa olla yhdensuuntaisia)
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)
- (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)

Tiedot (i)–(iv) ovat siinä järjestyksessä että, jos yksi tiedetään, seuraava on helppo johtaa. On siis helppoa edetä (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv).

Edellisten lauseiden perusteella, voidaan aina edetä (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i).

Yleisten kaavojen johtaminen on hankalaa.

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä (eivät saa olla samalla suoralla)
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria (eivät saa olla yhdensuuntaisia)
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)
- (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)

Tiedot (i)–(iv) ovat siinä järjestyksessä että, jos yksi tiedetään, seuraava on helppo johtaa. On siis helppoa edetä (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv).

Edellisten lauseiden perusteella, voidaan aina edetä (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i).

Yleisten kaavojen johtaminen on hankalaa.

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä (eivät saa olla samalla suoralla)
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria (eivät saa olla yhdensuuntaisia)
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)
- (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)

Tiedot (i)–(iv) ovat siinä järjestyksessä että, jos yksi tiedetään, seuraava on helppo johtaa. On siis helppoa edetä (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv).

Edellisten lauseiden perusteella, voidaan aina edetä (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i).

Yleisten kaavojen johtaminen on hankalaa.

Taso tunnetaan, jos tiedetään

- (i) tason kolme pistettä (eivät saa olla samalla suoralla)
- (ii) tason piste ja kaksi tason suuntavektoria (eivät saa olla yhdensuuntaisia)
- (iii) tason piste ja tason normaali $\mathbf{n} = (a, b, c)$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)
- (iv) tason yhtälö $ax + by + cz = d$ (ei saa olla $a = b = c = 0$)

Tiedot (i)–(iv) ovat siinä järjestyksessä että, jos yksi tiedetään, seuraava on helppo johtaa. On siis helppoa edetä (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv).

Edellisten lauseiden perusteella, voidaan aina edetä (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i).

Yleisten kaavojen johtaminen on hankalaa.