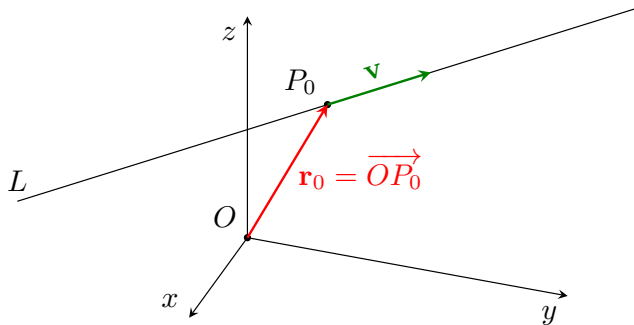


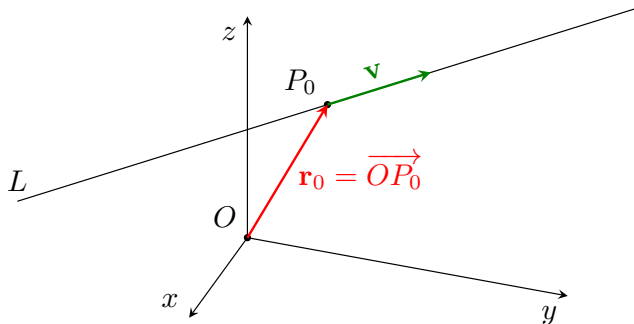
# Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,  
verkkomateriaali

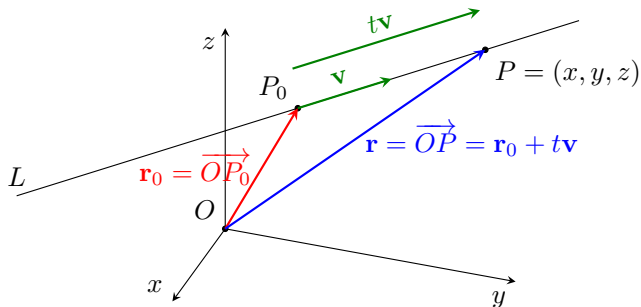


UNIVERSITY OF  
EASTERN FINLAND





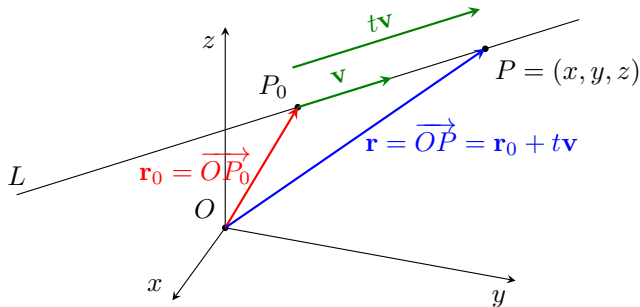
Olkoon  $L$  suora, joka kulkee pisteen  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  kautta ja on vektorin  $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$  suuntainen. Olkoon piste  $O = (0, 0, 0)$  origo.



Piste

$P = (x, y, z)$  kuuluu suoralle  $L$ , jos ja vain jos on olemassa sellainen  $t \in \mathbb{R}$ , että

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\mathbf{v}.$$



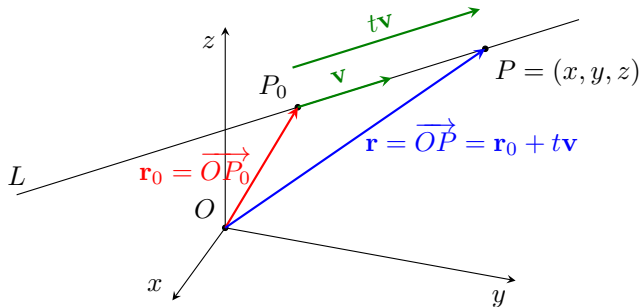
Piste

$P = (x, y, z)$  kuuluu suoralle  $L$ , jos ja vain jos on olemassa sellainen  $t \in \mathbb{R}$ , että

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\mathbf{v}.$$

Merkitään  $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$  ja  $\overrightarrow{OP_0} = \mathbf{r}_0$ , jolloin saadaan

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}.$$



## Määritelmä

Pisteen  $P_0$  kautta kulkevan, vektorin  $\mathbf{v}$  suuntaisen suoran [parametriesitys vektorimuodossa](#) on

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tässä  $\mathbf{r}_0$  on pisteen  $P_0$  paikkavektori.

Siis

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v},$$

Siis

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v},$$

mihin voidaan sijoittaa

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}.$$

Saadaan

$$\begin{aligned} x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} &= x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k} + t(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}) \\ \Leftrightarrow x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} &= (x_0 + ta)\mathbf{i} + (y_0 + tb)\mathbf{j} + (z_0 + tc)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Siis

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v},$$

mihin voidaan sijoittaa

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}.$$

Saadaan

$$\begin{aligned} x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} &= x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k} + t(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}) \\ \Leftrightarrow x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} &= (x_0 + ta)\mathbf{i} + (y_0 + tb)\mathbf{j} + (z_0 + tc)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Vektorit ovat samat, jos niiden komponentit ovat yhtä suuret.

Siis

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v},$$

mihin voidaan sijoittaa

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}.$$

Saadaan

$$\begin{aligned} x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} &= x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k} + t(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}) \\ \Leftrightarrow x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} &= (x_0 + ta)\mathbf{i} + (y_0 + tb)\mathbf{j} + (z_0 + tc)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Vektorit ovat samat, jos niiden komponentit ovat yhtä suuret. Saadaan siis

$$\begin{cases} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt, \\ z &= z_0 + ct \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

## Määritelmä

Pisteen  $P_0$  kautta kulkevan, vektorin  $\mathbf{v}$  suuntaisen suoran [parametriesitys](#) [vektorimuodossa](#) on

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

## Määritelmä

Pisteen  $P_0$  kautta kulkevan, vektorin  $\mathbf{v}$  suuntaisen suoran **parametriesitys vektorimuodossa** on

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tässä  $\mathbf{r}_0$  on pisteen  $P_0$  paikkavektori,  $\mathbf{v}$  on suoran **suuntavektori** ja  $t$  on **parametri**.

## Määritelmä

Pisteen  $P_0$  kautta kulkevan, vektorin  $\mathbf{v}$  suuntaisen suoran **parametriesitys vektorimuodossa** on

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tässä  $\mathbf{r}_0$  on pisteen  $P_0$  paikkavektori,  $\mathbf{v}$  on suoran **suuntavektori** ja  $t$  on **parametri**.

## Määritelmä

Pisteen  $P_0$  kautta kulkevan, vektorin  $\mathbf{v}$  suuntaisen suoran **parametriesitys koordinaattimuodossa** on

$$\begin{cases} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt, \\ z &= z_0 + ct \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

## Määritelmä

Pisteen  $P_0$  kautta kulkevan, vektorin  $\mathbf{v}$  suuntaisen suoran **parametriesitys vektorimuodossa** on

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tässä  $\mathbf{r}_0$  on pisteen  $P_0$  paikkavektori,  $\mathbf{v}$  on suoran **suuntavektori** ja  $t$  on **parametri**.

## Määritelmä

Pisteen  $P_0$  kautta kulkevan, vektorin  $\mathbf{v}$  suuntaisen suoran **parametriesitys koordinaattimuodossa** on

$$\begin{cases} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tässä  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  ja  $\mathbf{v} = (a, b, c)$  ja  $a, b, c$  ovat suoran **suuntaluvut**.

## Esimerkki

Määritetään pisteen  $P_0 = (0, -1, 2)$  kautta kulkevan vektorin  $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$  suuntaisen suoran parametriesitys sekä vektorimuodossa että koordinaattimuodossa.

## Esimerkki

Määritetään pisteen  $P_0 = (0, -1, 2)$  kautta kulkevan vektorin  $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$  suuntaisen suoran parametriesitys sekä vektorimuodossa että koordinaattimuodossa.

Merkitään  $\mathbf{r}_0 = -\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ .

## Esimerkki

Määritetään pisteen  $P_0 = (0, -1, 2)$  kautta kulkevan vektorin  $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$  suuntaisen suoran parametriesitys sekä vektorimuodossa että koordinaattimuodossa.

Merkitään  $\mathbf{r}_0 = -\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ . Suoran parametriesitys vektorimuodossa on

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \\ &= (-\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) + t(\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \\ &= t\mathbf{i} + (-1 + 3t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

## Esimerkki

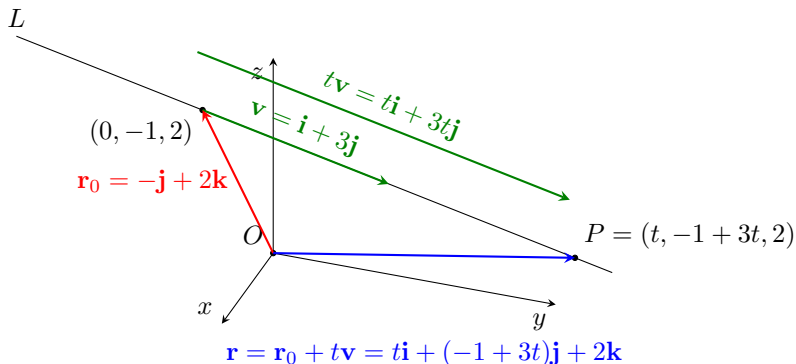
Määritetään pisteen  $P_0 = (0, -1, 2)$  kautta kulkevan vektorin  $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$  suuntaisen suoran parametriesitys sekä vektorimuodossa että koordinaattimuodossa.

Merkitään  $\mathbf{r}_0 = -\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ . Suoran parametriesitys vektorimuodossa on

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \\ &= (-\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) + t(\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \\ &= t\mathbf{i} + (-1 + 3t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Edelleen suoran parametriesitys koordinaattimuodossa on

$$\begin{cases} x = 0 + 1 \cdot t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 + 0 \cdot t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$



Esimerkin suora  $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + (-1 + 3t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  avaruudessa  $\mathbb{R}^3$ .

## Esimerkki

Suoran parametriesitys koordinaattimuodossa on

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 3t, \\ z = 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Mitä pisteitä suoralle kuuluu?

## Esimerkki

Suoran parametriesitys koordinaattimuodossa on

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 3t, \\ z = 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Mitä pisteitä suoralle kuuluu?

Esimerkiksi piste  $(0, -1, 2)$  on suoran piste, sillä sijoittamalla  $x = 0$ ,  $y = -1$  ja  $z = 2$  sekä valitsemalla  $t = 0$ , kaikki koordinaattimuotoiset yhtälöt toteutuvat.

## Esimerkki

Suoran parametriesitys koordinaattimuodossa on

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 3t, \\ z = 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Mitä pisteitä suoralle kuuluu?

Esimerkiksi piste  $(0, -1, 2)$  on suoran piste, sillä sijoittamalla  $x = 0$ ,  $y = -1$  ja  $z = 2$  sekä valitsemalla  $t = 0$ , kaikki koordinaattimuotoiset yhtälöt toteutuvat.

Sen sijaan esimerkiksi piste  $(0, 0, 0)$  ei ole suoran piste, sillä olipa  $t$  mikä tahansa reaaliluku, niin yhtälö  $z = 2$  ei toteudu, kun sijoitetaan  $x = y = z = 0$ .

## Esimerkki

Suoran parametriesitys koordinaattimuodossa on

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= -1 + 3t, \\ z &= 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Voidaanko suoralle kirjoittaa yhtälö?

## Esimerkki

Suoran parametriesitys koordinaattimuodossa on

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= -1 + 3t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z &= 2 \end{cases}$$

Voidaanko suoralle kirjoittaa yhtälö?

Joka tapauksessa  $z = 2$  riippumatta parametrilla  $t$ .

## Esimerkki

Suoran parametriesitys koordinaattimuodossa on

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= -1 + 3t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z &= 2 \end{cases}$$

Voidaanko suoralle kirjoittaa yhtälö?

Joka tapauksessa  $z = 2$  riippumatta parametrista  $t$ .

Lisäksi  $x = t$  ja  $y = -1 + 3t$  samalla parametrin  $t$  arvolla. Tästä löydetään yhteys pisteille  $x$  ja  $y$ . Ratkaistaan parametri  $t$  kummastakin yhtälöstä, jolloin saadaan  $t = x$  ja  $t = \frac{y+1}{3}$ .

## Esimerkki

Suoran parametriesitys koordinaattimuodossa on

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 3t, & t \in \mathbb{R}. \\ z = 2 \end{cases}$$

Voidaanko suoralle kirjoittaa yhtälö?

Joka tapauksessa  $z = 2$  riippumatta parametrilla  $t$ .

Lisäksi  $x = t$  ja  $y = -1 + 3t$  samalla parametrilla  $t$  arvolla. Tästä löydetään yhteys pisteille  $x$  ja  $y$ . Ratkaistaan parametri  $t$  kummastakin yhtälöstä, jolloin saadaan  $t = x$  ja  $t = \frac{y+1}{3}$ . Suoran **yhtälö normaalimuodossa** on

$$z = 2 \quad \wedge \quad x = \frac{y+1}{3}.$$

## Esimerkki

Suoran parametriesitys koordinaattimuodossa on

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 3t, & t \in \mathbb{R}. \\ z = 2 \end{cases}$$

Voidaanko suoralle kirjoittaa yhtälö?

Joka tapauksessa  $z = 2$  riippumatta parametrista  $t$ .

Lisäksi  $x = t$  ja  $y = -1 + 3t$  samalla parametrin  $t$  arvolla. Tästä löydetään yhteys pisteille  $x$  ja  $y$ . Ratkaistaan parametri  $t$  kummastakin yhtälöstä, jolloin saadaan  $t = x$  ja  $t = \frac{y+1}{3}$ . Suoran **yhtälö normaalimuodossa** on

$$z = 2 \quad \wedge \quad x = \frac{y+1}{3}.$$

Kyseessä on tasojen  $z = 2$  ja  $x = \frac{y+1}{3}$  leikkaussuora.

## Esimerkki

Suoran parametriesitys koordinaattimuodossa on

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

## Esimerkki

Suoran parametriesitys koordinaattimuodossa on

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Kyseessä on erikoistapaus, jossa suora on  $x$ -akselin suuntainen. Parametrille  $t$  on vain yksi esitystapa, joten mitään parametrista  $t$  riippuvaa ei voida asettaa yhtä suuriksi. Suoran yhtälö normaalimuodossa on

$$y = 2 \quad \wedge \quad z = 3.$$

## Esimerkki

Olkoot  $a, b, c \neq 0$ . Suoran parametriesitys koordinaattimuodossa on

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + ct \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

## Esimerkki

Olkoot  $a, b, c \neq 0$ . Suoran parametriesitys koordinaattimuodossa on

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + ct \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{x-x_0}{a} = t \\ \frac{y-y_0}{b} = t, \\ \frac{z-z_0}{c} = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

## Esimerkki

Olkoot  $a, b, c \neq 0$ . Suoran parametriesitys koordinaattimuodossa on

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{x-x_0}{a} = t \\ \frac{y-y_0}{b} = t \\ \frac{z-z_0}{c} = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

Asettamalla parametrin  $t$  esitystavat yhtä suuriksi, saadaan suoran yhtälöksi normaalimuodossa

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

## Esimerkki

Olkoot  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Tarkastellaan suoraa  $(x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

## Esimerkki

Olkoot  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Tarkastellaan suoraa  $(x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Jos  $a, b, c \neq 0$ , niin

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

## Esimerkki

Olkoot  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Tarkastellaan suoraa  $(x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Jos  $a, b, c \neq 0$ , niin

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Jos  $a = 0$  ja  $b, c \neq 0$ , niin

$$x = x_0 \quad \wedge \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

## Esimerkki

Olkoot  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Tarkastellaan suoraa  $(x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Jos  $a, b, c \neq 0$ , niin

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Jos  $a = 0$  ja  $b, c \neq 0$ , niin

$$x = x_0 \quad \wedge \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Jos  $a = b = 0$  ja  $c \neq 0$ , niin

$$x = x_0 \quad \wedge \quad y = y_0.$$

## Esimerkki

Olkoot  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Tarkastellaan suoraa  $(x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Jos  $a, b, c \neq 0$ , niin

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Jos  $a = 0$  ja  $b, c \neq 0$ , niin

$$x = x_0 \quad \wedge \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Jos  $a = b = 0$  ja  $c \neq 0$ , niin

$$x = x_0 \quad \wedge \quad y = y_0.$$

Jos  $a = b = c = 0$ , eli suoran suuntavektori on nollavektori, niin kyseessä ei ole suora vaan pelkästään yksi piste  $(x_0, y_0, z_0)$ .

## Määritelmä

Olkoot  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , missä  $(a, b, c)$  ei ole nollavektori. Tarkastellaan suoraa  $(x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

## Määritelmä

Olkoot  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , missä  $(a, b, c)$  ei ole nollavektori. Tarkastellaan suoraa  $(x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Muotoa

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

ja

$$x = x_0 \quad \wedge \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

ja

$$x = x_0 \quad \wedge \quad y = y_0$$

olevia yhtälöitä kutsutaan suoran **yhtälöksi normaalimuodossa**.