

Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



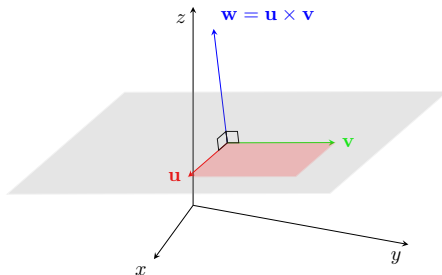
UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Määritelmä

Olkoot $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita. Olkoon $\mathbf{w}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektori siten, että

- (a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$ ja $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$,
- (b) $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$, missä θ on vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ välinen kulma,
- (c) järjestetty kolmikko $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ on positiivisesti suunnistettu (oikean käden systeemi).

Tällöin $\mathbf{w}$ on vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ **ristitulo** ja merkitään $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.



$\mathbf{w}$ on se vektori, jolle

- (i) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$
- (ii) $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$
- (iii) $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ pos.suun.

Jos vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ komponentit tiedetään, niin ristitulo voidaan laskea seuraavalla tavalla.

Jos vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ komponentit tiedetään, niin ristitulo voidaan laskea seuraavalla tavalla.

Lause

Olkoot $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.

Jos vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ komponentit tiedetään, niin ristitulo voidaan laskea seuraavalla tavalla.

Lause

Olkoot $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.

Tällöin

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}.$$

Jos vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ komponentit tiedetään, niin ristitulo voidaan laskea seuraavalla tavalla.

Lause

Olkoot $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.

Tällöin

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}.$$

Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = 1 \cdot \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$. Nyt

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (\quad)\mathbf{i} + (\quad)\mathbf{j} + (\quad)\mathbf{k}$$

Jos vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ komponentit tiedetään, niin ristitulo voidaan laskea seuraavalla tavalla.

Lause

Olkoot $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.

Tällöin

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}.$$

Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = 1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$. Nyt

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (2 \cdot 11 - 3 \cdot 7)\mathbf{i} + (\quad)\mathbf{j} + (\quad)\mathbf{k}$$

Jos vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ komponentit tiedetään, niin ristitulo voidaan laskea seuraavalla tavalla.

Lause

Olkoot $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.

Tällöin

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}.$$

Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = 1 \cdot \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$. Nyt

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (2 \cdot 11 - 3 \cdot 7)\mathbf{i} + (3 \cdot (-5) - 1 \cdot 11)\mathbf{j} + (\quad)\mathbf{k}$$

Jos vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ komponentit tiedetään, niin ristitulo voidaan laskea seuraavalla tavalla.

Lause

Olkoot $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.

Tällöin

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}.$$

Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = 1 \cdot \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$. Nyt

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (2 \cdot 11 - 3 \cdot 7)\mathbf{i} + (3 \cdot (-5) - 1 \cdot 11)\mathbf{j} + (1 \cdot 7 - 2 \cdot (-5))\mathbf{k}$$

Jos vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ komponentit tiedetään, niin ristitulo voidaan laskea seuraavalla tavalla.

Lause

Olkoot $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.

Tällöin

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}.$$

Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = 1 \cdot \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$. Nyt

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (2 \cdot 11 - 3 \cdot 7)\mathbf{i} + (3 \cdot (-5) - 1 \cdot 11)\mathbf{j} + (1 \cdot 7 - 2 \cdot (-5))\mathbf{k} \\ &= (22 - 21, -15 - 11, 7 + 10)\end{aligned}$$

Jos vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ komponentit tiedetään, niin ristitulo voidaan laskea seuraavalla tavalla.

Lause

Olkoot $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.

Tällöin

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}.$$

Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = 1 \cdot \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$. Nyt

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (2 \cdot 11 - 3 \cdot 7)\mathbf{i} + (3 \cdot (-5) - 1 \cdot 11)\mathbf{j} + (1 \cdot 7 - 2 \cdot (-5))\mathbf{k} \\ &= (22 - 21, -15 - 11, 7 + 10) \\ &= (1, -26, 17).\end{aligned}$$

Määritelmä

Olkoot $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita. Olkoon $\mathbf{w}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektori siten, että

- (a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$ ja $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$,
- (b) $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$, missä θ on vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ välinen kulma,
- (c) järjestetty kolmikko $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ on positiivisesti suunnistettu (oikean käden systeemi).

Tällöin $\mathbf{w}$ on vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ **ristitulo** ja merkitään $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Lause

Olkoot $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.

Tällöin

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}.$$

Todistetaan tämä lause.

Todistus. Merkitään

$$\mathbf{w} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\mathbf{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\mathbf{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\mathbf{k}.$$

ja osoitetaan, että $\mathbf{w}$ toteuttaa ristitulon määritelmän ehdot.

Todistus. Merkitään

$$\mathbf{w} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\mathbf{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\mathbf{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\mathbf{k}.$$

ja osoitetaan, että $\mathbf{w}$ toteuttaa ristitulon määritelmän ehdot.

Pistetulon määritelmän nojalla saadaan

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = u_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) + u_2(u_3 v_1 - u_1 v_3) + u_3(u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Todistus. Merkitään

$$\mathbf{w} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\mathbf{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\mathbf{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\mathbf{k}.$$

ja osoitetaan, että $\mathbf{w}$ toteuttaa ristitulon määritelmän ehdot.

Pistetulon määritelmän nojalla saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} &= u_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) + u_2(u_3 v_1 - u_1 v_3) + u_3(u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} &= u_1 u_2 v_3 - u_1 u_3 v_2 + u_2 u_3 v_1 - u_2 u_1 v_3 + u_3 u_1 v_2 - u_3 u_2 v_1 \end{aligned}$$

Todistus. Merkitään

$$\mathbf{w} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\mathbf{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\mathbf{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\mathbf{k}.$$

ja osoitetaan, että $\mathbf{w}$ toteuttaa ristitulon määritelmän ehdot.

Pistetulon määritelmän nojalla saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} &= u_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) + u_2(u_3 v_1 - u_1 v_3) + u_3(u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} &= u_1 u_2 v_3 - u_1 u_3 v_2 + u_2 u_3 v_1 - u_2 u_1 v_3 + u_3 u_1 v_2 - u_3 u_2 v_1 \\ \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} &= \cancel{u_1 u_2 v_3} - \cancel{u_1 u_3 v_2} + \cancel{u_2 u_3 v_1} - \cancel{u_2 u_1 v_3} + \cancel{u_3 u_1 v_2} - \cancel{u_3 u_2 v_1} \end{aligned}$$

Todistus. Merkitään

$$\mathbf{w} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\mathbf{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\mathbf{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\mathbf{k}.$$

ja osoitetaan, että $\mathbf{w}$ toteuttaa ristitulon määritelmän ehdot.

Pistetulon määritelmän nojalla saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} &= u_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) + u_2(u_3 v_1 - u_1 v_3) + u_3(u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} &= u_1 u_2 v_3 - u_1 u_3 v_2 + u_2 u_3 v_1 - u_2 u_1 v_3 + u_3 u_1 v_2 - u_3 u_2 v_1 \\ \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} &= \cancel{u_1 u_2 v_3} - \cancel{u_1 u_3 v_2} + \cancel{u_2 u_3 v_1} - \cancel{u_2 u_1 v_3} + \cancel{u_3 u_1 v_2} - \cancel{u_3 u_2 v_1} \\ \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} &= 0. \end{aligned}$$

Todistus. Merkitään

$$\mathbf{w} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\mathbf{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\mathbf{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\mathbf{k}.$$

ja osoitetaan, että $\mathbf{w}$ toteuttaa ristitulon määritelmän ehdot.

Pistetulon määritelmän nojalla saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} &= u_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) + u_2(u_3 v_1 - u_1 v_3) + u_3(u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} &= u_1 u_2 v_3 - u_1 u_3 v_2 + u_2 u_3 v_1 - u_2 u_1 v_3 + u_3 u_1 v_2 - u_3 u_2 v_1 \\ \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} &= \cancel{u_1 u_2 v_3} - \cancel{u_1 u_3 v_2} + \cancel{u_2 u_3 v_1} - \cancel{u_2 u_1 v_3} + \cancel{u_3 u_1 v_2} - \cancel{u_3 u_2 v_1} \\ \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} &= 0. \end{aligned}$$

Vastaavasti $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

Osoitetaan sitten, että $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$. Saadaan, että

$$|\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \sin^2 \theta$$

Osoitetaan sitten, että $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$. Saadaan, että

$$\begin{aligned} & |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \sin^2 \theta \\ &= |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 (1 - \cos^2 \theta) \end{aligned}$$

Osoitetaan sitten, että $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$. Saadaan, että

$$\begin{aligned} & |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \sin^2 \theta \\ &= |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \cos^2 \theta \end{aligned}$$

Osoitetaan sitten, että $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$. Saadaan, että

$$\begin{aligned} & |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \sin^2 \theta \\ &= \dots \\ &= |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \cos^2 \theta \\ &= |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - (|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta)^2 \end{aligned}$$

Osoitetaan sitten, että $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$. Saadaan, että

$$\begin{aligned} & |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \sin^2 \theta \\ &= \dots \\ &= |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - (|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta)^2 \\ &= |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \end{aligned}$$

Osoitetaan sitten, että $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$. Saadaan, että

$$\begin{aligned} & |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \sin^2 \theta \\ &= \dots \\ &= |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \\ &= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 \end{aligned}$$

Osoitetaan sitten, että $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$. Saadaan, että

$$\begin{aligned}
 & |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \sin^2 \theta \\
 &= \dots \\
 &= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 \\
 &= u_1^2 v_1^2 + u_1^2 v_2^2 + u_1^2 v_3^2 + u_2^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 + u_2^2 v_3^2 + u_3^2 v_1^2 + u_3^2 v_2^2 + u_3^2 v_3^2 \\
 &\quad - u_1^2 v_1^2 - u_1 v_1 u_2 v_2 - u_1 v_1 u_3 v_3 \\
 &\quad - u_2 v_2 u_1 v_1 - u_2^2 v_2^2 - u_2 v_2 u_3 v_3 \\
 &\quad - u_3 v_3 u_1 v_1 - u_3 v_3 u_2 v_2 - u_3^2 v_3^2
 \end{aligned}$$

Osoitetaan sitten, että $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$. Saadaan, että

$$\begin{aligned}
 & |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \sin^2 \theta \\
 &= \dots \\
 &= \cancel{u_1^2 v_1^2} + u_1^2 v_2^2 + u_1^2 v_3^2 + u_2^2 v_1^2 + \cancel{u_2^2 v_2^2} + u_2^2 v_3^2 + u_3^2 v_1^2 + u_3^2 v_2^2 + \cancel{u_3^2 v_3^2} \\
 &\quad - \cancel{u_1^2 v_1^2} - u_1 v_1 u_2 v_2 - u_1 v_1 u_3 v_3 \\
 &\quad - u_2 v_2 u_1 v_1 - \cancel{u_2^2 v_2^2} - u_2 v_2 u_3 v_3 \\
 &\quad - u_3 v_3 u_1 v_1 - u_3 v_3 u_2 v_2 - \cancel{u_3^2 v_3^2}
 \end{aligned}$$

Osoitetaan sitten, että $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$. Saadaan, että

$$\begin{aligned}
 & |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \sin^2 \theta \\
 &= \dots \\
 &= \cancel{u_1^2 v_1^2} + u_1^2 v_2^2 + u_1^2 v_3^2 + u_2^2 v_1^2 + \cancel{u_2^2 v_2^2} + u_2^2 v_3^2 + u_3^2 v_1^2 + u_3^2 v_2^2 + \cancel{u_3^2 v_3^2} \\
 &\quad - \cancel{u_1^2 v_1^2} - 2u_1 v_1 u_2 v_2 - 2u_1 v_1 u_3 v_3 \\
 &\quad - \cancel{u_2 v_2 u_1 v_1} - \cancel{u_2^2 v_2^2} - 2u_2 v_2 u_3 v_3 \\
 &\quad - \cancel{u_3 v_3 u_1 v_1} - \cancel{u_3 v_3 u_2 v_2} - \cancel{u_3^2 v_3^2}
 \end{aligned}$$

Osoitetaan sitten, että $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$. Saadaan, että

$$\begin{aligned}
 & |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \sin^2 \theta \\
 &= \dots \\
 &= \cancel{u_1^2 v_1^2} + u_1^2 v_2^2 + u_1^2 v_3^2 + u_2^2 v_1^2 + \cancel{u_2^2 v_2^2} + u_2^2 v_3^2 + u_3^2 v_1^2 + u_3^2 v_2^2 + \cancel{u_3^2 v_3^2} \\
 &\quad - \cancel{u_1^2 v_1^2} - 2u_1 v_1 u_2 v_2 - 2u_1 v_1 u_3 v_3 \\
 &\quad - \cancel{u_2 v_2 u_1 v_1} - \cancel{u_2^2 v_2^2} - 2u_2 v_2 u_3 v_3 \\
 &\quad - \cancel{u_3 v_3 u_1 v_1} - \cancel{u_3 v_3 u_2 v_2} - \cancel{u_3^2 v_3^2} \\
 &= u_2^2 v_3^2 - 2u_2 v_3 u_3 v_2 + u_3^2 v_2^2 \\
 &\quad + u_3^2 v_1^2 - 2u_3 v_1 u_1 v_3 + u_1^2 v_3^2 \\
 &\quad + u_1^2 v_2^2 - 2u_1 v_2 u_2 v_1 + u_2^2 v_1^2
 \end{aligned}$$

Osoitetaan sitten, että $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$. Saadaan, että

$$\begin{aligned} & |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \sin^2 \theta \\ &= \dots \\ &= u_2^2 v_3^2 - 2u_2 v_3 u_3 v_2 + u_3^2 v_2^2 \\ &\quad + u_3^2 v_1^2 - 2u_3 v_1 u_1 v_3 + u_1^2 v_3^2 \\ &\quad + u_1^2 v_2^2 - 2u_1 v_2 u_2 v_1 + u_2^2 v_1^2 \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 \end{aligned}$$

Osoitetaan sitten, että $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$. Saadaan, että

$$\begin{aligned} & |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \sin^2 \theta \\ &= \dots \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 \\ &= |\mathbf{w}|^2. \end{aligned}$$

Osoitetaan sitten, että $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$. Saadaan, että

$$\begin{aligned} & |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \sin^2 \theta \\ &= \dots \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 \\ &= |\mathbf{w}|^2. \end{aligned}$$

Siis $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$.

$$\mathbf{w} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\mathbf{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\mathbf{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\mathbf{k}.$$

Osoitetaan vielä, että kolmikko $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ on positiivisesti suunnistettu. Kierretään koordinaatistoa siten, että $\mathbf{u}$ on positiivisella x -akselilla ja $\mathbf{v}$ on xy -tason siinä puolikkaassa, jossa pisteiden y -koordinaatti on ei-negatiivinen. Tällöin voidaan merkitä

$$\mathbf{u} = x_1 \mathbf{i}$$

$$\mathbf{v} = x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j},$$

missä $x_1 > 0$ ja $y_2 > 0$. Tällöin vektori $\mathbf{w} = x_1 y_2 \mathbf{k}$, missä $x_1 y_2 > 0$. Siis vektori $\mathbf{w} = x_1 y_2 \mathbf{k}$ suuntautuu positiivisen z -akselin suuntaan ja kolmikko $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ on positiivisesti suunnattu.

Siis vektori

$$\mathbf{w} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\mathbf{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\mathbf{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\mathbf{k}$$

toteuttaa ristitulon määritelmän ehdot. Siis

$$\mathbf{u} \times \mathbf{w} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\mathbf{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\mathbf{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\mathbf{k}.$$

