

Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



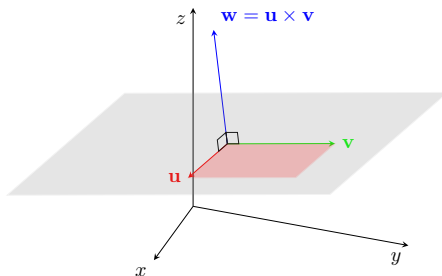
UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Määritelmä

Olkoot $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita. Olkoon $\mathbf{w}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektori siten, että

- (a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$ ja $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$,
- (b) $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$, missä θ on vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ välinen kulma,
- (c) järjestetty kolmikko $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ on positiivisesti suunnistettu (oikean käden systeemi).

Tällöin $\mathbf{w}$ on vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ **ristitulo** ja merkitään $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.



$\mathbf{w}$ on se vektori, jolle

- (i) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$
- (ii) $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$
- (iii) $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ pos.suun.

Lause

Olkoot $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.

Tällöin

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}.$$

Pohditaan kaavaa

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \mathbf{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \mathbf{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{k},$$

joka voi tuntua aluksi monimutkaiselta.

Jos ajatellaan “[$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$] = [1, 2, 3]”, niin indeksien logiikka on selvä

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \underbrace{(u_2 v_3 - u_3 v_2)}_{\text{ei indeksiä 1}} \underbrace{\mathbf{i}}_1 + \underbrace{(u_3 v_1 - u_1 v_3)}_{\text{ei indeksiä 2}} \underbrace{\mathbf{j}}_2 + \underbrace{(u_1 v_2 - u_2 v_1)}_{\text{ei indeksiä 3}} \underbrace{\mathbf{k}}_3.$$

Jos ensimmäinen termi on $u_j v_k$, niin toinen vähennettävä termi on muotoa $u_k v_j$ eli “toisin päin”. Siis esimerkiksi termistä $u_2 v_3$ vähennetään termi $u_3 v_2$.

Pohditaan kaavaa

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \mathbf{i} + \underbrace{(u_3 v_1 - u_1 v_3)}_{\text{miksi ei } (u_1 v_3 - v_1 u_3)?} \mathbf{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{k}.$$

Luettelemalla koordinaattiakselit positiiviseen kiertosuuntaan (oikean käden säännön mukaisesti), saadaan luettelo “xyz”. Luettelemalla kaksi kertaa, saadaan luettelo xyzxyz, josta voidaan poimia kolme peräkkäistä

$$\underbrace{xyz}_{xyz} xyz \Rightarrow x(yz - \dots) \Rightarrow \mathbf{i}(u_2 v_3 - \dots)$$

$$x \underbrace{yzx}_{yzx} yz \Rightarrow y(zx - \dots) \Rightarrow \mathbf{j}(u_3 v_1 - \dots)$$

$$xy \underbrace{zxy}_{zxy} z \Rightarrow z(xy - \dots) \Rightarrow \mathbf{k}(u_1 v_2 - \dots).$$

Siis kaavassa

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \mathbf{i} + \underbrace{(u_3 v_1 - u_1 v_3)}_{\text{miksi ei } (u_1 v_3 - v_1 u_3)?} \mathbf{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{k}.$$

indeksien järjestys perustuu oikean käden sääntöön.

