

Vektorilaskenta

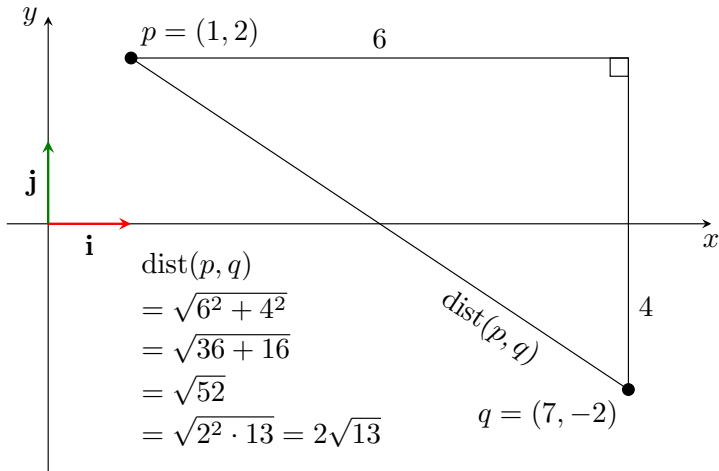
Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Tasossa voidaan tarkastella kahden eri kuvion välistä etäisyyttä. Mahdollisia kuvioita ovat esimerkiksi piste, suora, ympyrä ja monikulmio.

Tasossa voidaan tarkastella kahden eri kuvion välistä etäisyyttä. Mahdollisia kuvioita ovat esimerkiksi piste, suora, ympyrä ja monikulmio.



Esimerkki

Lasketaan pisteen $p = (1, 2)$ etäisyys pisteestä $q = (7, -2)$.

Esimerkki

Lasketaan pisteen $p = (1, 2)$ etäisyys pisteestä $q = (7, -2)$. Tarkastellaan vektoria $\mathbf{u} = \overrightarrow{pq} = q - p = (7 - 1, -2 - 2) = (6, -4)$.

Esimerkki

Lasketaan pisteen $p = (1, 2)$ etäisyys pisteestä $q = (7, -2)$. Tarkastellaan vektoria $\mathbf{u} = \overrightarrow{pq} = q - p = (7 - 1, -2 - 2) = (6, -4)$. Pythagoraan lauseella saadaan

$$\text{dist}(p, q) = |\mathbf{u}| = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \approx 7,21.$$

Esimerkki

Lasketaan pisteen $p = (1, 2)$ etäisyys pisteestä $q = (7, -2)$. Tarkastellaan vektoria $\mathbf{u} = \overrightarrow{pq} = q - p = (7 - 1, -2 - 2) = (6, -4)$. Pythagoraan lauseella saadaan

$$\text{dist}(p, q) = |\mathbf{u}| = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \approx 7,21.$$

Toisaalta, voidaan suoraan käyttää pisteiden koordinaatteja, jolloin saadaan sama tulos

$$\text{dist}(p, q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2} = \dots = 2\sqrt{13}.$$

Esimerkki

Lasketaan pisteen $p = (1, 2)$ etäisyys pisteestä $q = (7, -2)$. Tarkastellaan vektoria $\mathbf{u} = \overrightarrow{pq} = q - p = (7 - 1, -2 - 2) = (6, -4)$. Pythagoraan lauseella saadaan

$$\text{dist}(p, q) = |\mathbf{u}| = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \approx 7,21.$$

Toisaalta, voidaan suoraan käyttää pisteiden koordinaatteja, jolloin saadaan sama tulos

$$\text{dist}(p, q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2} = \dots = 2\sqrt{13}.$$

Huomautus

Pisteiden välisen etäisyyden neliö olisi helpompi laskea

$$\text{dist}(p, q)^2 = (q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 = \dots = 52.$$



Määritelmä

Kahden kuvion A ja B välinen **etäisyys** $\text{dist}(A, B)$ on minimi etäisyyksistä p, q , missä $p \in A$ ja $q \in B$.

Määritelmä

Kahden kuvion A ja B välinen **etäisyys** $\text{dist}(A, B)$ on minimi etäisyyksistä p, q , missä $p \in A$ ja $q \in B$.

Esimerkki

Tarkastellaan pistettä $q = (3, 4)$ ja suoraa $p(t) = (1, 1) + t(2, 1) = (1 + 2t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Määritelmä

Kahden kuvion A ja B välinen **etäisyys** $\text{dist}(A, B)$ on minimi etäisyyksistä p, q , missä $p \in A$ ja $q \in B$.

Esimerkki

Tarkastellaan pistettä $q = (3, 4)$ ja suoraa $p(t) = (1, 1) + t(2, 1) = (1 + 2t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$. Lasketaan etäisyyden neliö

$$\begin{aligned}\text{dist}(p(t), q)^2 &= (1 + 2t - 3)^2 + (1 + t - 4)^2 = (2t - 2)^2 + (t - 3)^2 \\&= 4t^2 - 8t + 4 + t^2 - 6t + 9 = 5t^2 - 14t + 13 \\&= 5 \left[t^2 - \frac{14}{5}t \right] + 13 = 5 \left[t^2 - 2 \cdot \frac{7}{5}t + \frac{7^2}{5^2} - \frac{7^2}{5^2} \right] + 13 \\&= 5 \left(t - \frac{7}{5} \right)^2 + \frac{16}{5}.\end{aligned}$$

Määritelmä

Kahden kuvion A ja B välinen **etäisyys** $\text{dist}(A, B)$ on minimi etäisyyksistä p, q , missä $p \in A$ ja $q \in B$.

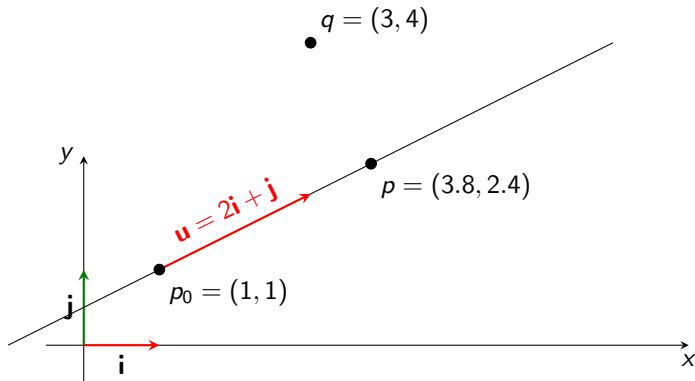
Esimerkki

Tarkastellaan pistettä $q = (3, 4)$ ja suoraa $p(t) = (1, 1) + t(2, 1) = (1 + 2t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$. Lasketaan etäisyyden neliö

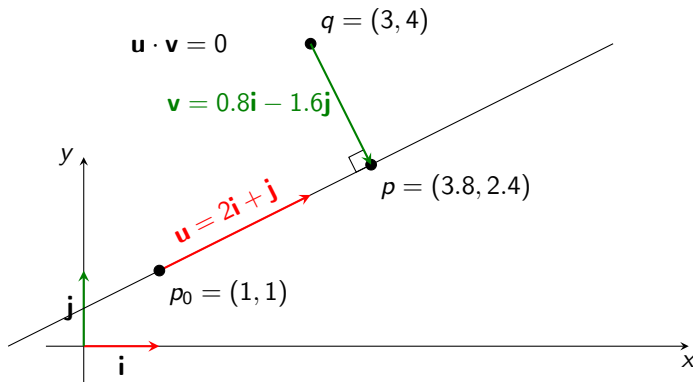
$$\begin{aligned}\text{dist}(p(t), q)^2 &= (1 + 2t - 3)^2 + (1 + t - 4)^2 = (2t - 2)^2 + (t - 3)^2 \\&= 4t^2 - 8t + 4 + t^2 - 6t + 9 = 5t^2 - 14t + 13 \\&= 5 \left[t^2 - \frac{14}{5}t \right] + 13 = 5 \left[t^2 - 2 \cdot \frac{7}{5}t + \frac{7^2}{5^2} - \frac{7^2}{5^2} \right] + 13 \\&= 5 \left(t - \frac{7}{5} \right)^2 + \frac{16}{5}.\end{aligned}$$

Siis pistettä q lähin piste on $p(7/5) = (19/5, 12/5) = (3.8, 2.4)$ ja $\text{dist}(p(7/5), q) = \sqrt{16/5} = 4/\sqrt{5} \approx 1,79$.

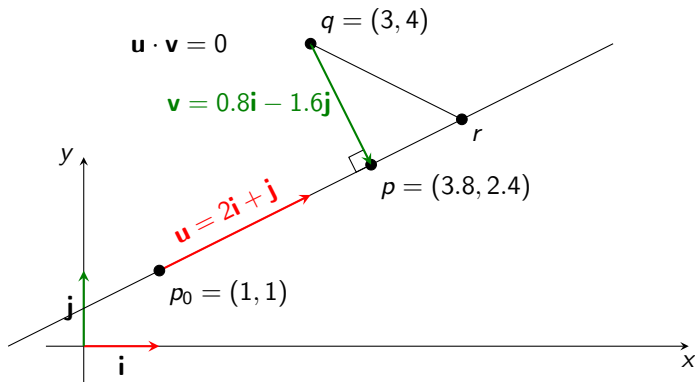
Tarkastellaan pistettä $q = (3, 4)$ ja suoraa $p(t) = (1, 1) + t(2, 1) = (1 + 2t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$.



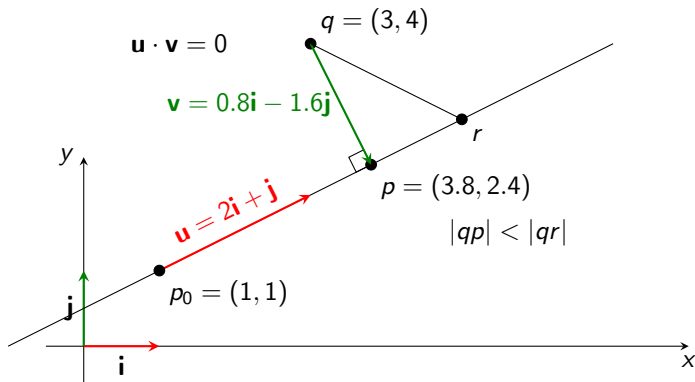
Tarkastellaan pistettä $q = (3, 4)$ ja suoraa $p(t) = (1, 1) + t(2, 1) = (1 + 2t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$.



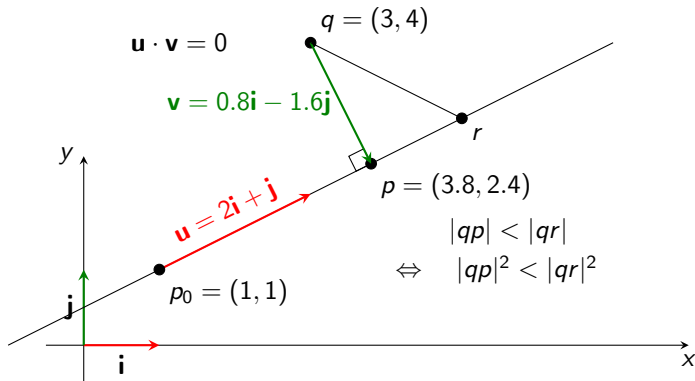
Tarkastellaan pistettä $q = (3, 4)$ ja suoraa $p(t) = (1, 1) + t(2, 1) = (1 + 2t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$.



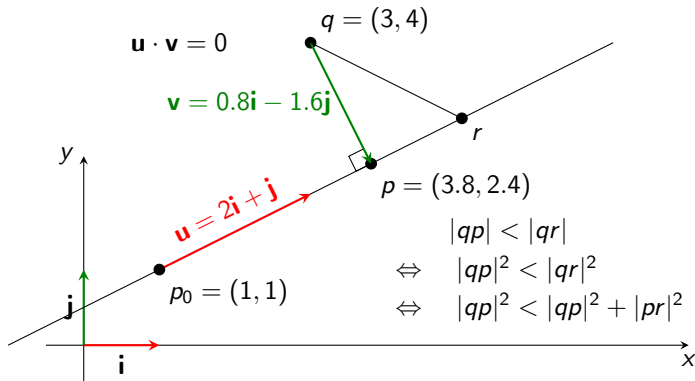
Tarkastellaan pistettä $q = (3, 4)$ ja suoraa $p(t) = (1, 1) + t(2, 1) = (1 + 2t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$.



Tarkastellaan pistettä $q = (3, 4)$ ja suoraa $p(t) = (1, 1) + t(2, 1) = (1 + 2t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$.



Tarkastellaan pistettä $q = (3, 4)$ ja suoraa $p(t) = (1, 1) + t(2, 1) = (1 + 2t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$.



Määritelmä

Kahden kuvion A ja B välinen **etäisyys** $\text{dist}(A, B)$ on minimi etäisyyksistä p, q , missä $p \in A$ ja $q \in B$.

Määritelmä

Kahden kuvion A ja B välinen **etäisyys** $\text{dist}(A, B)$ on minimi etäisyyksistä p, q , missä $p \in A$ ja $q \in B$.

Esimerkki

Pistettä $q = (3, 4)$ lähin suoran $p(t) = (1, 1) + t(2, 1) = (1 + 2t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$ piste on $(19/5, 12/5)$.

Määritelmä

Kahden kuvion A ja B välinen **etäisyys** $\text{dist}(A, B)$ on minimi etäisyyksistä p, q , missä $p \in A$ ja $q \in B$.

Esimerkki

Pistettä $q = (3, 4)$ lähin suoran $p(t) = (1, 1) + t(2, 1) = (1 + 2t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$ piste on $(19/5, 12/5)$. Merkitään

$$\mathbf{u} = (2, 1), \quad \mathbf{v} = (3, 4) - (19/5, 12/5) = \frac{1}{5}(-4, 8).$$

Määritelmä

Kahden kuvion A ja B välinen **etäisyys** $\text{dist}(A, B)$ on minimi etäisyyksistä p, q , missä $p \in A$ ja $q \in B$.

Esimerkki

Pistettä $q = (3, 4)$ lähin suoran $p(t) = (1, 1) + t(2, 1) = (1 + 2t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$ piste on $(19/5, 12/5)$. Merkitään

$$\mathbf{u} = (2, 1), \quad \mathbf{v} = (3, 4) - (19/5, 12/5) = \frac{1}{5}(-4, 8).$$

Tällöin $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Määritelmä

Kahden kuvion A ja B välinen **etäisyys** $\text{dist}(A, B)$ on minimi etäisyyksistä p, q , missä $p \in A$ ja $q \in B$.

Esimerkki

Pistettä $q = (3, 4)$ lähin suoran $p(t) = (1, 1) + t(2, 1) = (1 + 2t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$ piste on $(19/5, 12/5)$. Merkitään

$$\mathbf{u} = (2, 1), \quad \mathbf{v} = (3, 4) - (19/5, 12/5) = \frac{1}{5}(-4, 8).$$

Tällöin $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Lause

Pistettä q lähin suoran $p(t) = p_0 + t\mathbf{u}$ piste p_1 toteuttaa $(q - p_1) \cdot \mathbf{u} = 0$.

Lause

Pistettä q lähin suoran $p(t) = p_0 + t\mathbf{u}$ piste p_1 toteuttaa $(q - p_1) \cdot \mathbf{u} = 0$.

Lause

Pistettä q lähin suoran $p(t) = p_0 + t\mathbf{u}$ piste p_1 toteuttaa $(q - p_1) \cdot \mathbf{u} = 0$.

Lause voidaan muotoilla yhtäpitävästi toisella tavalla.

Lause

Pistettä q lähin suoran $p(t) = p_0 + t\mathbf{u}$ piste p_1 toteuttaa $(q - p_1) \cdot \mathbf{u} = 0$.

Lause voidaan muotoilla yhtäpitävästi toisella tavalla.

Lause

Tarkastellaan suoraa L ja suoran ulkopuolista pistettä Q . Olkoon $P, R \in L$ kaksi eri pistettä. Oletetaan, että kulma $\angle QPR$ on suora. Tällöin P on suoran pisteistä lähimpänä pistettä Q .

Lause

Pistettä q lähin suoran $p(t) = p_0 + t\mathbf{u}$ piste p_1 toteuttaa $(q - p_1) \cdot \mathbf{u} = 0$.

Lause voidaan muotoilla yhtäpitävästi toisella tavalla.

Lause

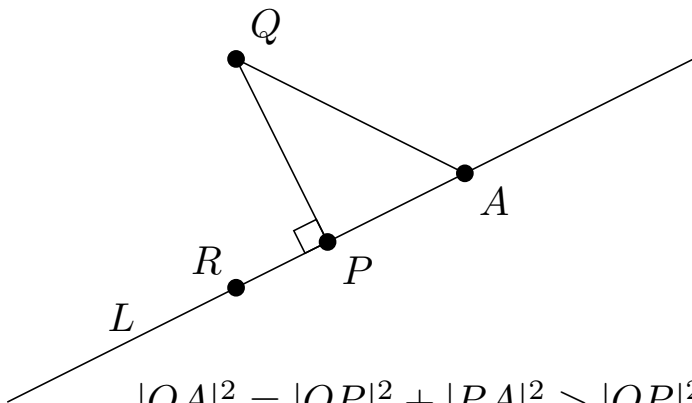
Tarkastellaan suoraa L ja suoran ulkopuolista pistettä Q . Olkoon $P, R \in L$ kaksi eri pistettä. Oletetaan, että kulma $\angle QPR$ on suora. Tällöin P on suoran pisteistä lähimpänä pistettä Q .

Todistus.

Olkoon $A \in L$, $A \neq P$. Pythagoraan lauseen perusteella

$$|QA| = \sqrt{|QP|^2 + |PA|^2} > \sqrt{|QP|^2 + 0} = |QP|.$$





$$\begin{aligned} |QA|^2 &= |QP|^2 + |PA|^2 > |QP|^2 \\ \Rightarrow |QA| &> |QP| \end{aligned}$$

Lause

Tarkastellaan suoraa L ja suoran ulkopuolista pistettä Q . Olkoon $P, R \in L$ kaksi eri pistettä. Oletetaan, että kulma $\angle QPR$ on suora. Tällöin P on suoran pisteistä lähimpänä pistettä Q .

Lause

Tarkastellaan suoraa L ja suoran ulkopuolista pistettä Q . Olkoon $P, R \in L$ kaksi eri pistettä. Oletetaan, että kulma $\angle QPR$ on suora. Tällöin P on suoran pisteistä lähimpänä pistettä Q .

Todistus.

Olkoon $A \in L$, $A \neq P$. Pythagoraan lauseen perusteella

$$|QA| = \sqrt{|QP|^2 + |PA|^2} > \sqrt{|QP|^2 + 0} = |QP|.$$



Lause

Tarkastellaan suoraa L ja suoran ulkopuolista pistettä Q . Olkoon $P, R \in L$ kaksi eri pistettä. Oletetaan, että kulma $\angle QPR$ on suora. Tällöin P on suoran pisteistä lähimpänä pistettä Q .

Todistus.

Olkoon $A \in L$, $A \neq P$. Pythagoraan lauseen perusteella

$$|QA| = \sqrt{|QP|^2 + |PA|^2} > \sqrt{|QP|^2 + 0} = |QP|.$$



Siis Pythagoraan lauseesta johtuen kohtisuorat etäisyydet ovat lyhimpiä! Tämä pätee yleisesti!

Lause

Tarkastellaan suoraa L ja suoran ulkopuolista pistettä Q . Olkoon $P, R \in L$ kaksi eri pistettä. Oletetaan, että kulma $\angle QPR$ on suora. Tällöin P on suoran pisteistä lähimpänä pistettä Q .

Lause

Tarkastellaan suoraa L ja suoran ulkopuolista pistettä Q . Olkoon $P, R \in L$ kaksi eri pistettä. Oletetaan, että kulma $\angle QPR$ on suora. Tällöin P on suoran pisteistä lähimpänä pistettä Q .

Seuraus

Pisteen q etäisyys suorasta L , jolla on parametriesitys $p(t) = p_0 + t\mathbf{u}$, toteuttaa

$$\text{dist}(q, L) = |(q - p_0) - [(q - p_0) \cdot \hat{\mathbf{u}}] \cdot \hat{\mathbf{u}}|$$

ja

$$\text{dist}(q, L) = |(q - p_0) \times \hat{\mathbf{u}}| = \frac{|(q - p_0) \times \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|}$$

Lause

Tarkastellaan suoraa L ja suoran ulkopuolista pistettä Q . Olkoon $P, R \in L$ kaksi eri pistettä. Oletetaan, että kulma $\angle QPR$ on suora. Tällöin P on suoran pisteistä lähimpänä pistettä Q .

Seuraus

Pisteen q etäisyys suorasta L , jolla on parametriesitys $p(t) = p_0 + t\mathbf{u}$, toteuttaa

$$\text{dist}(q, L) = |(q - p_0) - [(q - p_0) \cdot \hat{\mathbf{u}}] \cdot \hat{\mathbf{u}}|$$

ja

$$\text{dist}(q, L) = |(q - p_0) \times \hat{\mathbf{u}}| = \frac{|(q - p_0) \times \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|}$$

Todistus.

Tulos seuraa vektoriprojektion ja ristitulon ominaisuuksista. □

Esimerkki

Lasketaan pisteen $q = (3, 4)$ ja suoran $p(t) = p_0 + t\mathbf{u} = (1, 1) + t(2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ välinen etäisyys. Merkitään $\mathbf{v} = q - p_0 = (3, 4) - (1, 1) = (2, 3)$. Nyt etäisyys on vektorin

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u}$$

pituus.

Esimerkki

Lasketaan pisteen $q = (3, 4)$ ja suoran $p(t) = p_0 + t\mathbf{u} = (1, 1) + t(2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ välinen etäisyys. Merkitään $\mathbf{v} = q - p_0 = (3, 4) - (1, 1) = (2, 3)$. Nyt etäisyys on vektorin

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u}$$

pituus. Nyt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = (2, 3) \cdot (2, 1) = 4 + 3 = 7$ ja $|\mathbf{u}|^2 = 2^2 + 1^2 = 5$.

Esimerkki

Lasketaan pisteen $q = (3, 4)$ ja suoran $p(t) = p_0 + t\mathbf{u} = (1, 1) + t(2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ välinen etäisyys. Merkitään $\mathbf{v} = q - p_0 = (3, 4) - (1, 1) = (2, 3)$. Nyt etäisyys on vektorin

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u}$$

pituus. Nyt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = (2, 3) \cdot (2, 1) = 4 + 3 = 7$ ja $|\mathbf{u}|^2 = 2^2 + 1^2 = 5$. Siis

$$\mathbf{w} = (2, 3) - \frac{7}{5}(2, 1) = \frac{1}{5}(-4, -6)$$

Esimerkki

Lasketaan pisteen $q = (3, 4)$ ja suoran $p(t) = p_0 + t\mathbf{u} = (1, 1) + t(2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ välinen etäisyys. Merkitään $\mathbf{v} = q - p_0 = (3, 4) - (1, 1) = (2, 3)$. Nyt etäisyys on vektorin

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u}$$

pituus. Nyt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = (2, 3) \cdot (2, 1) = 4 + 3 = 7$ ja $|\mathbf{u}|^2 = 2^2 + 1^2 = 5$. Siis

$$\mathbf{w} = (2, 3) - \frac{7}{5}(2, 1) = \frac{1}{5}(-4, -6)$$

ja $|\mathbf{w}| = \frac{1}{5}\sqrt{4^2 + 6^2} = \frac{1}{5}\sqrt{52} = \frac{2\sqrt{13}}{5}$. Siis etsitty etäisyys on $\frac{2\sqrt{13}}{5}$.

Esimerkki

Lasketaan pisteen $q = (3, 4)$ ja suoran $p(t) = p_0 + t\mathbf{u} = (1, 1) + t(2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ välinen etäisyys.

Esimerkki

Lasketaan pisteen $q = (3, 4)$ ja suoran $p(t) = p_0 + t\mathbf{u} = (1, 1) + t(2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ välinen etäisyys. Merkitään $\mathbf{v} = q - p_0 = (3, 4) - (1, 1) = (2, 3)$.

Esimerkki

Lasketaan pisteen $q = (3, 4)$ ja suoran $p(t) = p_0 + t\mathbf{u} = (1, 1) + t(2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ välinen etäisyys. Merkitään $\mathbf{v} = q - p_0 = (3, 4) - (1, 1) = (2, 3)$. Nyt etäisyys on vektorin

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$$

pituus.

Esimerkki

Lasketaan pisteen $q = (3, 4)$ ja suoran $p(t) = p_0 + t\mathbf{u} = (1, 1) + t(2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ välinen etäisyys. Merkitään $\mathbf{v} = q - p_0 = (3, 4) - (1, 1) = (2, 3)$. Nyt etäisyys on vektorin

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$$

pituus. Nyt $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = (2, 3) \times (2, 1) = (2 \cdot 1 - 3 \cdot 2)\mathbf{k} = -4\mathbf{k}$ ja $|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

Esimerkki

Lasketaan pisteen $q = (3, 4)$ ja suoran $p(t) = p_0 + t\mathbf{u} = (1, 1) + t(2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ välinen etäisyys. Merkitään $\mathbf{v} = q - p_0 = (3, 4) - (1, 1) = (2, 3)$. Nyt etäisyys on vektorin

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$$

pituus. Nyt $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = (2, 3) \times (2, 1) = (2 \cdot 1 - 3 \cdot 2)\mathbf{k} = -4\mathbf{k}$ ja $|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. Siis

$$\mathbf{w} = -\frac{4}{\sqrt{5}}\mathbf{k}, \quad |\mathbf{w}| = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Esimerkki

Lasketaan pisteen $q = (3, 4)$ ja suoran $p(t) = p_0 + t\mathbf{u} = (1, 1) + t(2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ välinen etäisyys. Merkitään $\mathbf{v} = q - p_0 = (3, 4) - (1, 1) = (2, 3)$. Nyt etäisyys on vektorin

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$$

pituus. Nyt $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = (2, 3) \times (2, 1) = (2 \cdot 1 - 3 \cdot 2)\mathbf{k} = -4\mathbf{k}$ ja $|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. Siis

$$\mathbf{w} = -\frac{4}{\sqrt{5}}\mathbf{k}, \quad |\mathbf{w}| = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Siis etsitty etäisyys on $4/\sqrt{5}$.