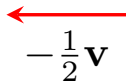
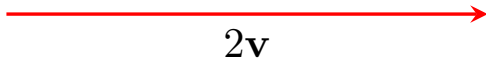


Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND



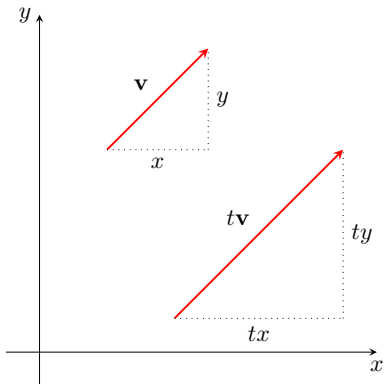
Määritelmä

Vektori $\mathbf{u}$ **kerrotaan skalaarilla** eli reaaliluvulla t siten, että jokainen komponentti kerrotaan skalaarilla t . Lopputulosta merkitään $t\mathbf{u}$.

Määritelmä

Vektori $\mathbf{u}$ **kerrotaan skalaarilla** eli reaaliluvulla t siten, että jokainen komponentti kerrotaan skalaarilla t . Lopputulosta merkitään $t\mathbf{u}$.

Siis $t\mathbf{u}$ on vektori $\mathbf{u}$ **skaalattuna** skalaarilla t .

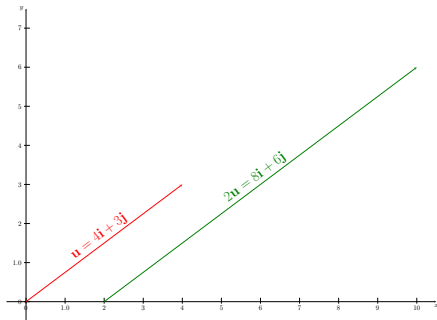


Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = (4, 3)$ ja $t = 2$. Tällöin $t\mathbf{u} = 2 \cdot (4, 3) = (8, 6)$. Nyt $t > 0$ ja vektorit $(4, 3)$ ja $(8, 6)$ ovat **samansuuntaiset**.

Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = (4, 3)$ ja $t = 2$. Tällöin $t\mathbf{u} = 2 \cdot (4, 3) = (8, 6)$. Nyt $t > 0$ ja vektorit $(4, 3)$ ja $(8, 6)$ ovat **samansuuntaiset**.

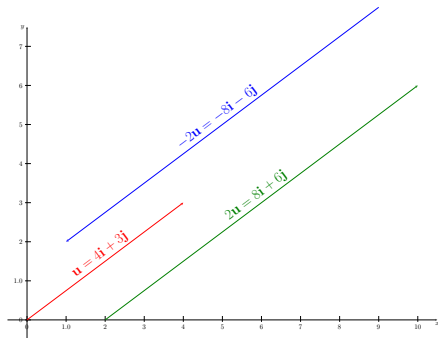


Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = (4, 3)$ ja $t = -2$. Tällöin $t\mathbf{u} = -2 \cdot (4, 3) = (-8, -6)$. Nyt $t < 0$ ja vektorit $(4, 3)$ ja $(-8, -6)$ ovat **vastakkaissuuntaiset**.

Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = (4, 3)$ ja $t = -2$. Tällöin $t\mathbf{u} = -2 \cdot (4, 3) = (-8, -6)$. Nyt $t < 0$ ja vektorit $(4, 3)$ ja $(-8, -6)$ ovat **vastakkaissuuntaiset**.



Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = (4, 3)$ ja $t = 2$. Tällöin $t\mathbf{u} = 2 \cdot (4, 3) = (8, 6)$. Nyt $t > 0$ ja vektorit $(4, 3)$ ja $(8, 6)$ ovat **samansuuntaiset**.

Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = (4, 3)$ ja $t = 2$. Tällöin $t\mathbf{u} = 2 \cdot (4, 3) = (8, 6)$. Nyt $t > 0$ ja vektorit $(4, 3)$ ja $(8, 6)$ ovat **samansuuntaiset**.

Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = (4, 3)$ ja $t = -2$. Tällöin $t\mathbf{u} = -2 \cdot (4, 3) = (-8, -6)$. Nyt $t < 0$ ja vektorit $(4, 3)$ ja $(-8, -6)$ ovat **vastakkaissuuntaiset**.

Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = (4, 3)$ ja $t = 2$. Tällöin $t\mathbf{u} = 2 \cdot (4, 3) = (8, 6)$. Nyt $t > 0$ ja vektorit $(4, 3)$ ja $(8, 6)$ ovat **samansuuntaiset**.

Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = (4, 3)$ ja $t = -2$. Tällöin $t\mathbf{u} = -2 \cdot (4, 3) = (-8, -6)$. Nyt $t < 0$ ja vektorit $(4, 3)$ ja $(-8, -6)$ ovat **vastakkaissuuntaiset**.

Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = (4, 3)$ ja $t = 0$. Tällöin $t\mathbf{u} = 0 \cdot (4, 3) = (0, 0) = \mathbf{0}$.

Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = (4, 3)$ ja $t = 2$. Tällöin $t\mathbf{u} = 2 \cdot (4, 3) = (8, 6)$. Nyt $t > 0$ ja vektorit $(4, 3)$ ja $(8, 6)$ ovat **samansuuntaiset**.

Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = (4, 3)$ ja $t = -2$. Tällöin $t\mathbf{u} = -2 \cdot (4, 3) = (-8, -6)$. Nyt $t < 0$ ja vektorit $(4, 3)$ ja $(-8, -6)$ ovat **vastakkaissuuntaiset**.

Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = (4, 3)$ ja $t = 0$. Tällöin $t\mathbf{u} = 0 \cdot (4, 3) = (0, 0) = \mathbf{0}$.

Määritelmä

Vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat **yhdensuuntaiset**, jos $\mathbf{u} = t\mathbf{v}$ jollakin $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tällöin $\mathbf{v} = \frac{1}{t}\mathbf{u}$. Erityisesti, jos $t > 0$, niin vektorit ovat **samansuuntaiset**, ja jos $t < 0$, niin vektorit ovat **vastakkaissuuntaiset**.

Määritelmä

Vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat **yhdensuuntaiset**, jos $\mathbf{u} = t\mathbf{v}$ jollakin $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tällöin $\mathbf{v} = \frac{1}{t}\mathbf{u}$. Erityisesti, jos $t > 0$, niin vektorit ovat **samansuuntaiset**, ja jos $t < 0$, niin vektorit ovat **vastakkaissuuntaiset**.

Määritelmä

Vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat **yhdensuuntaiset**, jos $\mathbf{u} = t\mathbf{v}$ jollakin $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tällöin $\mathbf{v} = \frac{1}{t}\mathbf{u}$. Erityisesti, jos $t > 0$, niin vektorit ovat **samansuuntaiset**, ja jos $t < 0$, niin vektorit ovat **vastakkaissuuntaiset**.

Joskus yhdensuuntaisuutta merkitään $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$.

Määritelmä

Vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat **yhdensuuntaiset**, jos $\mathbf{u} = t\mathbf{v}$ jollakin $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tällöin $\mathbf{v} = \frac{1}{t}\mathbf{u}$. Erityisesti, jos $t > 0$, niin vektorit ovat **samansuuntaiset**, ja jos $t < 0$, niin vektorit ovat **vastakkaissuuntaiset**.

Joskus yhdensuuntaisuutta merkitään $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$.

Samansuuntaisuutta voitaisiin merkitä $\mathbf{u} \uparrow\uparrow \mathbf{v}$.

Määritelmä

Vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat **yhdensuuntaiset**, jos $\mathbf{u} = t\mathbf{v}$ jollakin $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tällöin $\mathbf{v} = \frac{1}{t}\mathbf{u}$. Erityisesti, jos $t > 0$, niin vektorit ovat **samansuuntaiset**, ja jos $t < 0$, niin vektorit ovat **vastakkaissuuntaiset**.

Joskus yhdensuuntaisuutta merkitään $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$.

Samansuuntaisuutta voitaisiin merkitä $\mathbf{u} \uparrow\uparrow \mathbf{v}$.

Vastakkaissuuntaisuutta voitaisiin merkitä $\mathbf{u} \uparrow\downarrow \mathbf{v}$.

Määritelmä

Vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat **yhdensuuntaiset**, jos $\mathbf{u} = t\mathbf{v}$ jollakin $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tällöin $\mathbf{v} = \frac{1}{t}\mathbf{u}$. Erityisesti, jos $t > 0$, niin vektorit ovat **samansuuntaiset**, ja jos $t < 0$, niin vektorit ovat **vastakkaissuuntaiset**.

Joskus yhdensuuntaisuutta merkitään $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$.

Samansuuntaisuutta voitaisiin merkitä $\mathbf{u} \uparrow\uparrow \mathbf{v}$.

Vastakkaissuuntaisuutta voitaisiin merkitä $\mathbf{u} \uparrow\downarrow \mathbf{v}$.

(Merkinnät $\mathbf{u} \uparrow\uparrow \mathbf{v}$ ja $\mathbf{u} \uparrow\downarrow \mathbf{v}$ eivät ole vakiintuneita.)

Määritelmä

Vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat **yhdensuuntaiset**, jos $\mathbf{u} = t\mathbf{v}$ jollakin $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tällöin $\mathbf{v} = \frac{1}{t}\mathbf{u}$. Erityisesti, jos $t > 0$, niin vektorit ovat **samansuuntaiset**, ja jos $t < 0$, niin vektorit ovat **vastakkaissuuntaiset**.

Joskus yhdensuuntaisuutta merkitään $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$.

Samansuuntaisuutta voitaisiin merkitä $\mathbf{u} \uparrow\uparrow \mathbf{v}$.

Vastakkaisuuntaisuutta voitaisiin merkitä $\mathbf{u} \uparrow\downarrow \mathbf{v}$.

(Merkinnät $\mathbf{u} \uparrow\uparrow \mathbf{v}$ ja $\mathbf{u} \uparrow\downarrow \mathbf{v}$ eivät ole vakiintuneita.)

Huomautus

Olkoon $\mathbf{u}$ vektori ja $t = 0$. Tällöin $t\mathbf{u} = \mathbf{0}$ on nollavektori. Koska nollavektorilla ei ole suuntaa, ei sanota, että " $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{0}$ ovat yhdensuuntaiset".

Lause

Oletetaan, että $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat keskenään yhdensuuntaiset. Oletetaan lisäksi, että $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ ovat keskenään yhdensuuntaiset. Tällöin $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{w}$ ovat keskenään yhdensuuntaiset.

Todistus.

Joillakin skalaareilla $t, s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pätee $\mathbf{u} = t\mathbf{v}$ ja $\mathbf{v} = s\mathbf{w}$. Siis $\mathbf{u} = t(s\mathbf{w}) = (ts)\mathbf{w}$, missä $ts \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Väite seuraa. □

Määritelmä

Vektorin $\mathbf{u}$ **vastavektori** $-\mathbf{u}$ on se vektori, jonka pituus on $|\mathbf{u}|$ ja jonka suunta on vektorin $\mathbf{u}$ suunnalle päinvastainen. Siis $-\mathbf{u} = (-1) \cdot \mathbf{u}$.

Esimerkki

Vektorin $\mathbf{u} = (4, 3)$ vastavektori on $-\mathbf{v} = (-1) \cdot (4, 3) = (-4, -3)$.

Määritelmä

Vektori $\mathbf{0} = (0, 0, 0) = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ on **nollavektori**. Nollavektorin pituus on nolla ja nollavektorilla ei ole suuntaa.

Huomautus

Jos $\mathbf{u}$ on vektori, niin $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ on nollavektori.

Määritelmä

Jos vektorin $\mathbf{u}$ pituus $|\mathbf{u}| = 1$, niin sanotaan, että $\mathbf{u}$ on **yksikkövektori**.

Jos vektori $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, niin vektoria

$$\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$$

sanotaan vektorin $\mathbf{u}$ **suuntavektoriksi**. Siis kyseessä on vektorin $\mathbf{u}$ suuntainen yksikkövektori.

Huomautus

Vektorit ovat yhdensuuntaiset, jos ja vain jos niillä on sama suuntavektori.

