

Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Määritelmä

Vektorin $\mathbf{u}$ pituus $|\mathbf{u}|$ on vektoria esittävän suunnatun janan pituus.

Määritelmä

Vektorin $\mathbf{u}$ **pituus** $|\mathbf{u}|$ on vektoria esittävän suunnatun janan pituus.

Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

Määritelmä

Vektorin **u** **pituus** $|\mathbf{u}|$ on vektoria esittävän suunnatun janan pituus.

Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Pythagoraan lauseen nojalla

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3.$$

Määritelmä

Vektorin $\mathbf{u}$ **pituus** $|\mathbf{u}|$ on vektoria esittävän suunnatun janan pituus.

Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Pythagoraan lauseen nojalla

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3.$$

Jakamalla vektori omalla pituudellaan, saadaan **yksikkövektori**

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{1}{3}\mathbf{u} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

Määritelmä

Vektorin **u** **pituus** $|\mathbf{u}|$ on vektoria esittävän suunnatun janan pituus.

Esimerkki

Olkoon $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Pythagoraan lauseen nojalla

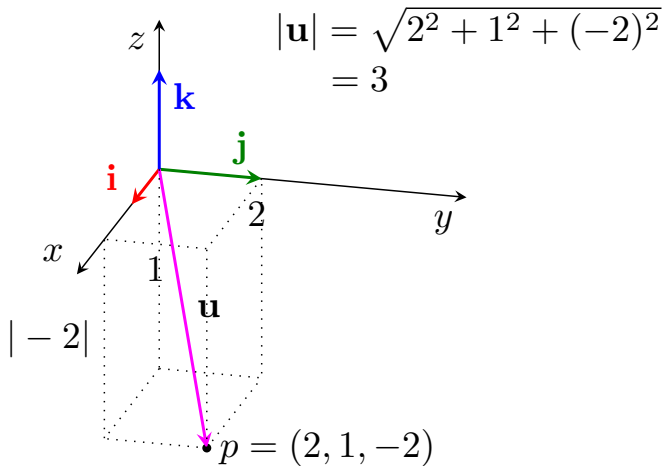
$$|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3.$$

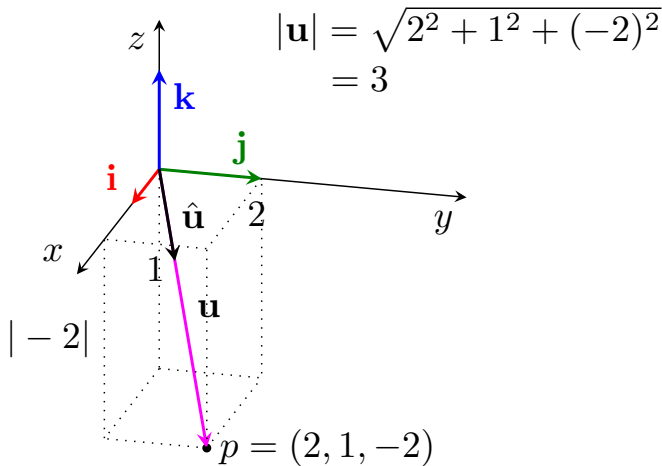
Jakamalla vektori omalla pituudellaan, saadaan **yksikkövektori**

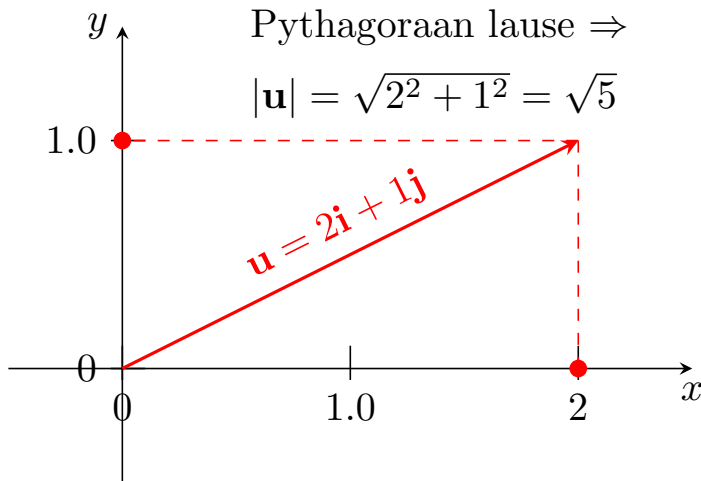
$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{1}{3}\mathbf{u} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

Yksikkövektorin pituus on yksi

$$|\hat{\mathbf{u}}| = \sqrt{\frac{2^2}{3^2} + \frac{1^2}{3^2} + \frac{2^2}{4^2}} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = 1.$$

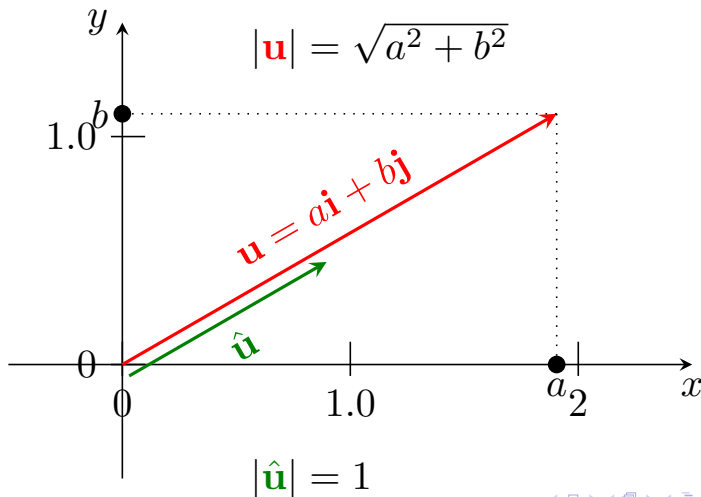




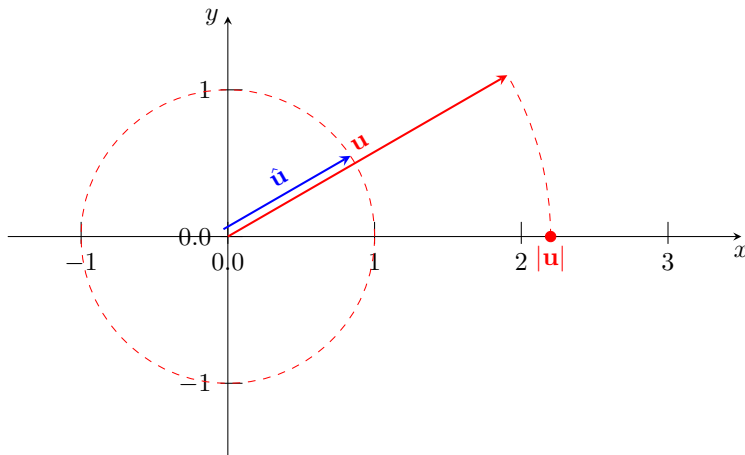


Pythagoraan lause $\Rightarrow$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Vektorin pituuden saisi selville myös kiertämällä vektorin esimerkiksi x -akselille.



Lause

Olkoon $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ vektori. Yksikkövektorin $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ pituus on yksi.

Lause

Olkoon $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ vektori. Yksikkövektorin $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ pituus on yksi.

Todistus.

Olkoon $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Saadaan

$$P = |\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \hat{\mathbf{v}} = \frac{x}{P}\mathbf{i} + \frac{y}{P}\mathbf{j} + \frac{z}{P}\mathbf{k}.$$

Edelleen ($P > 0$, joten $\sqrt{P^2} = |P| = P$)

$$|\hat{\mathbf{v}}| = \sqrt{\frac{x^2}{P^2} + \frac{y^2}{P^2} + \frac{z^2}{P^2}} = \frac{1}{P} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{P} P = 1.$$



Esimerkki

Mikä on vektorin $\mathbf{u} = 30\mathbf{i} + 60\mathbf{j} - 90\mathbf{k}$ pituus?

Esimerkki

Mikä on vektorin $\mathbf{u} = 30\mathbf{i} + 60\mathbf{j} - 90\mathbf{k}$ pituus?

Huomataan, että $\mathbf{u} = 30(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$. Merkitään $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

Esimerkki

Mikä on vektorin $\mathbf{u} = 30\mathbf{i} + 60\mathbf{j} - 90\mathbf{k}$ pituus?

Huomataan, että $\mathbf{u} = 30(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$. Merkitään $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

Siis

$$|\mathbf{u}| = |30\mathbf{v}| = 30|\mathbf{v}| = 30\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = 30\sqrt{14} \approx 30 \cdot 3.74 \approx 112.$$

Määritelmä

Vektorin $\mathbf{u}$ **vastavektori** $-\mathbf{u}$ on se vektori, jonka pituus on $|\mathbf{u}|$ ja jonka suunta on vektorin $\mathbf{u}$ suunnalle päinvastainen. Siis $-\mathbf{u} = (-1) \cdot \mathbf{u}$.

Määritelmä

Vektorin $\mathbf{u}$ **vastavektori** $-\mathbf{u}$ on se vektori, jonka pituus on $|\mathbf{u}|$ ja jonka suunta on vektorin $\mathbf{u}$ suunnalle päinvastainen. Siis $-\mathbf{u} = (-1) \cdot \mathbf{u}$.

Esimerkki

Vektorin $\mathbf{u} = (3, 4)$ vastavektori on $-\mathbf{v} = (-1) \cdot (3, 4) = (-3, -4)$.

Määritelmä

Vektori $\mathbf{0} = (0, 0, 0) = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ on **nollavektori**. Nollavektorin pituus on nolla ja nollavektorilla ei ole suuntaa.

Määritelmä

Vektori $\mathbf{0} = (0, 0, 0) = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ on **nollavektori**. Nollavektorin pituus on nolla ja nollavektorilla ei ole suuntaa.

Huomautus

Jos $\mathbf{u}$ on vektori, niin $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ on nollavektori.

Määritelmä

Vektori $\mathbf{0} = (0, 0, 0) = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ on **nollavektori**. Nollavektorin pituus on nolla ja nollavektorilla ei ole suuntaa.

Huomautus

Jos $\mathbf{u}$ on vektori, niin $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ on nollavektori.

Määritelmä

Jos vektorin $\mathbf{u}$ pituus $|\mathbf{u}| = 1$, niin sanotaan, että $\mathbf{u}$ on **yksikkövektori**.

Jos vektori $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, niin vektoria

$$\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$$

sanotaan vektorin $\mathbf{u}$ **suuntavektoriksi**. Siis kyseessä on vektorin $\mathbf{u}$ suuntainen yksikkövektori.

Määritelmä

Vektori $\mathbf{0} = (0, 0, 0) = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ on **nollavektori**. Nollavektorin pituus on nolla ja nollavektorilla ei ole suuntaa.

Huomautus

Jos $\mathbf{u}$ on vektori, niin $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ on nollavektori.

Määritelmä

Jos vektorin $\mathbf{u}$ pituus $|\mathbf{u}| = 1$, niin sanotaan, että $\mathbf{u}$ on **yksikkövektori**.

Jos vektori $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, niin vektoria

$$\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$$

sanotaan vektorin $\mathbf{u}$ **suuntavektoriksi**. Siis kyseessä on vektorin $\mathbf{u}$ suuntainen yksikkövektori.

Huomautus

Vektorit ovat yhdensuuntaiset, jos ja vain jos niillä on sama suuntavektori.