

Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Esimerkki

Tasot T_1 ja T_2 , joiden yhtälöt ovat

$$T_1 : \quad x + 2y + 3z = 7$$

$$T_2 : \quad 2x + 4y + 6z = 16$$

eivät leikkaa. Nimittäin jälkimmäinen yhtälö voidaan jakaa puolittain luvulla 2 ja saadaan

$$T_1 : \quad x + 2y + 3z = 7$$

$$T_2 : \quad x + 2y + 3z = 8$$

Jos tasoilla olisi yhteinen leikkauspiste (x_0, y_0, z_0) , niin pätesi

$$7 = x_0 + 2y_0 + 3z_0 = 8,$$

mikä on mahdotonta. Tasot ovat siis yhdensuuntaisia.

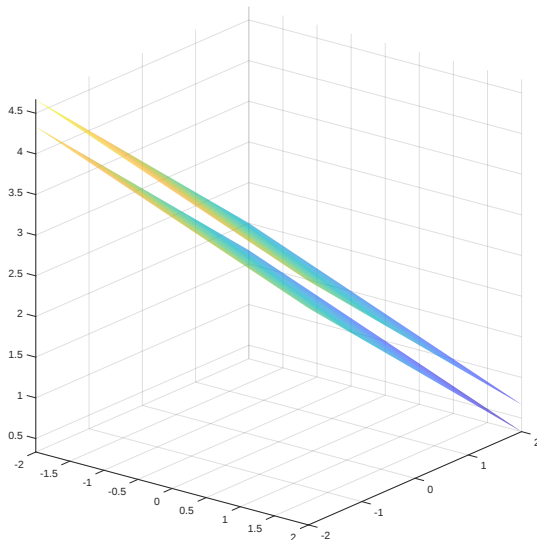
Esimerkki

Tasot T_1 ja T_2 , joiden yhtälöt ovat

$$T_1 : \quad x + 2y + 3z = 7$$

$$T_2 : \quad 2x + 4y + 6z = 16$$

eivät leikkaa. Nimittäin tasojen eräät normaalit ovat $\mathbf{n}_1 = (1, 2, 3)$ ja $\mathbf{n}_2 = (2, 4, 6)$. Nähdään, että $\mathbf{n}_1 = t\mathbf{n}_2$ jollakin $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, eli tasojen normaalit ovat yhdensuuntaiset. (Ekvivalenttisesti $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = 0$.) Siis tasot ovat yhdensuuntaiset.



Esimerkki

Tasot T_1 ja T_2 , joiden yhtälöt ovat

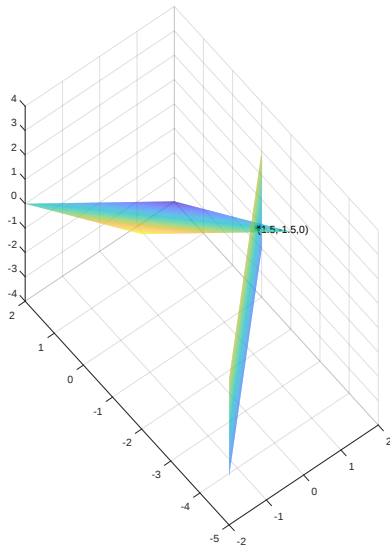
$$T_1 : \quad x - y = 3$$

$$T_2 : \quad x + y + z = 0$$

leikkaavat. Tämä voidaan nähdä monella eri tavalla.

Nähdään, että piste $(4, 1, -5)$ toteuttaa molempien tasojen yhtälöt. Siis ainakin yksi leikkauspiste on olemassa. Leikkauspisteitä täytyy toki olla enemmänkin.

Tasojen yhtälö esittävät selvästi ei-yhdensuuntaisia tasoja. Toista ei saada toisesta kertomalla vakiolla.



Esimerkki

Tasot T_1 ja T_2 , joiden yhtälöt ovat

$$T_1 : \quad x - y = 3$$

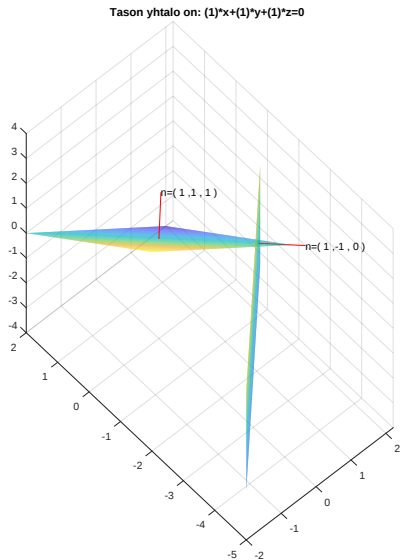
$$T_2 : \quad x + y + z = 0$$

leikkaavat. Tämä voidaan nähdä monella eri tavalla.

Tasojen normaalit $\mathbf{n}_1 = (1, -1, 0)$ ja $\mathbf{n}_2 = (1, 1, 1)$ eivät ole yhdensuuntaisia. Vektori $t\mathbf{n}_1 = (t, -t, 0) \neq (1, 1, 1)$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$, koska kolmannet komponentit eivät ole samat.

Normaalit $\mathbf{n}_1$ ja $\mathbf{n}_2$ eivät ole yhdensuuntaisia myöskään siitä syystä, että

$$\mathbf{u} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (1, -1, 0) \times (1, 1, 1) = (-1, -1, 2) \neq \mathbf{0}.$$



Esimerkki

Tarkastellaan tasoja T_1 ja T_2 , joiden yhtälöt ovat

$$T_1 : \quad x - y = 3$$

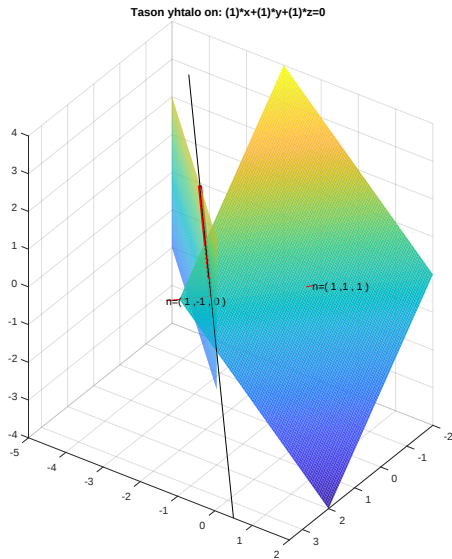
$$T_2 : \quad x + y + z = 0$$

Koska normaalit $\mathbf{n}_1 = (1, -1, 0)$ ja $\mathbf{n}_2 = (1, 1, 1)$ eivät ole yhdensuuntaisia, tasolla on yhteinen leikkaussuora. Leikkaussuora on kummankin tason suuntainen ja sen vuoksi sen suuntavektori on kohtisuorassa vektoreita $\mathbf{n}_1$ ja $\mathbf{n}_2$ vastaan. Siis suuntavektoriksi voidaan valita ristitulo

$$\mathbf{u} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (1, -1, 0) \times (1, 1, 1) = (-1, -1, 2).$$

Piste $(4, 1, -5)$ toteuttaa molempien tasojen yhtälöt ja kuuluu siis tasojen leikkaussuoralle. Tasojen leikkaussuoran parametriesitykseksi saadaan

$$\mathbf{r} = (4, 1, -5) + t(-1, -1, 2).$$



Esimerkki

Tarkastellaan tasoja T_1 ja T_2 , joiden yhtälöt ovat

$$\begin{aligned}T_1 : \quad & 2x - y = 3 \\T_2 : \quad & x + y + 3z = 1.\end{aligned}$$

Leikkaussuoran pisteet toteuttavat kummankin yhtälön ja siis

$$A = 2x - y - 3 = 0$$

$$B = x + y + 3z - 1 = 0, \quad (x, y, z) \in T_1 \cap T_2.$$

Siis, koska $A = B = 0$, niin leikkaussuoran pisteissä

$$\alpha A + \beta B = \alpha(2x - y - 3) + \beta(x + y + 3z - 1) = 0.$$

Siis leikkaussuoran pisteet toteuttavat yhtälön

$$(2\alpha + \beta)x + (-\alpha + \beta)y + (0 \cdot \alpha + 3\beta) + (-3\alpha - \beta) = 0.$$

Esimerkki (jatkuu)

Siis, koska $A = B = 0$, niin leikkaussuoran pisteissä

$$\alpha A + \beta B = \alpha(2x - y - 3) + \beta(x + y + 3z - 1) = 0.$$

Siis leikkaussuoran pisteet toteuttavat yhtälön

$$(2\alpha + \beta)x + (-\alpha + \beta)y + (0 \cdot \alpha + 3\beta) + (-3\alpha - \beta) = 0.$$

Tämä yhtälö on muotoa $ax + by + cz = d$ ja on siis tason yhtälö! Siis kyseessä on jokin tasojen T_1 ja T_2 leikkaussuoran kautta kulkeva yhtälö.

Vastaava päättely voidaan tehdä yleisesti. Näin saadaan johdettua seuraava lause.

Lause

Tarkastellaan tasoja T_1 ja T_2 , joiden yhtälöt ovat

$$\begin{aligned}T_1 : \quad & ax + by + cz = d \\T_2 : \quad & Ax + By + Cz = D.\end{aligned}$$

Olkoot lisäksi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ siten, että ei päde $\alpha = \beta = 0$ (vähintään toinen on nollasta eroava). Tällöin yhtälö

$$\alpha(ax + by + cz - d) + \beta(Ax + By + Cz - D) = 0$$

esittää tasoa, joka kulkee tasojen T_1 ja T_2 leikkaussuoran kautta.

Todistus.

Päätellään kuten edellisessä esimerkissä.



Tarkastellaan yhtälöä

$$\alpha(ax + by + cz - d) + \beta(Ax + By + Cz - D) = 0,$$

missä vähintään toinen luvuista α ja β on nollasta eroava ja pätee siis $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} > 0$. Jaetaan yhtälö tällä luvulla, saadaan

$$\underbrace{\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}_{\gamma_1} (ax + by + cz - d) + \underbrace{\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}_{\gamma_2} (Ax + By + Cz - D) = 0.$$

Nyt

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = 1.$$

Siis (γ_1, γ_2) on jokin yksikköympyrän piste ja voidaan asettaa $(\gamma_1, \gamma_2) = (\cos s, \sin s)$ jollakin $s \in [0, 2\pi]$.

Lause

Tarkastellaan tasoja T_1 ja T_2 , joiden yhtälöt ovat

$$\begin{aligned}T_1 : \quad & ax + by + cz = d \\T_2 : \quad & Ax + By + Cz = D.\end{aligned}$$

Oletetaan, että $T_1 \neq T_2$ eli että kyseessä on kaksi eri tasoa. Tällöin jokainen tasojen T_1 ja T_2 leikkaussuoran kautta kulkeva taso on muotoa

$$\cos(s) \cdot (ax + by + cz - d) + \sin(s) \cdot (Ax + By + Cz - D) = 0$$

jollakin $s \in [0, 2\pi]$.

Todistus.

Pääteltiin edellä.



Esimerkki

Tarkastellaan tasoja T_1 ja T_2 , joiden yhtälöt ovat

$$T_1 : \quad x - y = 3$$

$$T_2 : \quad x + y + z = 0.$$

Aiemmin nähtiin, että piste $(1.5, 1.5, 0)$ kuuluu kumpaankin tasoon. Lisäksi tasojen leikkaussuora on $\mathbf{r} = (4, 1, -5) + t(-1, -1, 2)$.

Suoran $\mathbf{r} = (4, 1, -5) + t(-1, -1, 2)$, $t \in \mathbb{R}$, kautta kulkevat tasot ovat muotoa

$$\cos(s) \cdot (x - y - 3) + \sin(s) \cdot (x + y + z) = 0, \quad s \in [0, 2\pi].$$

Tason yhtälö on: $(1)x + (-1)y + (-2.4493e-16)z = 3$

