

Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Määritelmä

Vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ **pistetulo** määritellään seuraavasti

$$\text{Jos} \quad \mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$$

$$\text{ja} \quad \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k},$$

Määritelmä

Vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ **pistetulo** määritellään seuraavasti

$$\begin{array}{ll}\text{Jos} & \mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k} \\ \text{ja} & \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}, \\ \text{niin} & \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.\end{array}$$

Määritelmä

Vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ **pistetulo** määritellään seuraavasti

$$\text{Jos} \quad \mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$$

$$\text{ja} \quad \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k},$$

$$\text{niin} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Siis $\mathbf{i}$ -, $\mathbf{j}$ - ja $\mathbf{k}$ -komponenttien kertoimet kerrotaan keskenään.

Määritelmä

Vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ **pistetulo** määritellään seuraavasti

$$\begin{aligned} \text{Jos} \quad & \mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k} \\ \text{ja} \quad & \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}, \\ \text{niin} \quad & \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3. \end{aligned}$$

Siis $\mathbf{i}$ -, $\mathbf{j}$ - ja $\mathbf{k}$ -komponenttien kertoimet kerrotaan keskenään.

Huomautus

Vastaavasti määritellään pistetulo tasossa $\mathbb{R}^2$.

Määritelmä

Vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ **pistetulo** määritellään seuraavasti

$$\begin{aligned} \text{Jos} \quad & \mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k} \\ \text{ja} \quad & \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}, \\ \text{niin} \quad & \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3. \end{aligned}$$

Siis $\mathbf{i}$ -, $\mathbf{j}$ - ja $\mathbf{k}$ -komponenttien kertoimet kerrotaan keskenään.

Huomautus

Vastaavasti määritellään pistetulo tasossa $\mathbb{R}^2$.

Esimerkki

Pätee

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}^2 = |\mathbf{u}|^2.$$

Esimerkki

Olkoon vektorit

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Esimerkki

Olkoon vektorit

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Tällöin $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-1) = 6 - 2 + 2 = 6.$

Lause

Jos $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ovat vektoreita ja t on skalaari, niin

(a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u},$

(b) $(t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (t\mathbf{v}) = t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}),$

(c) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w},$

(d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2,$

(e) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0.$

Todistus. (a) Olkoot $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = d\mathbf{i} + e\mathbf{j} + f\mathbf{k}$. Todistetaan väite $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ suoralla laskulla

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}) \cdot (d\mathbf{i} + e\mathbf{j} + f\mathbf{k}) \\ &= ad + be + cf \\ &= da + eb + fc \\ &= (d\mathbf{i} + e\mathbf{j} + f\mathbf{k}) \cdot (a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}) \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}.\end{aligned}$$

Laskussa käytettiin reaalilukujen kertolaskun vaihdannaisuutta, esimerkiksi $ad = da$.

(b) Olkoot $\mathbf{u} = (a, b, c)$ ja $\mathbf{v} = (d, e, f)$. Todistetaan väite $(t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$.

$$\begin{aligned}(t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} &= [t(a, b, c)] \cdot (d, e, f) = (ta, tb, tc) \cdot (d, e, f) \\&= tad + tbe + tcf = t(ad + be + cf) \\&= t[(a, b, c) \cdot (d, e, f)] \\&= t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}).\end{aligned}$$

Laskussa käytettiin reaalilukujen osittelulakia $x(y + z) = xy + xz$ kohdassa $tad + tbe + tcf = t(ad + be + cf)$.

Väite $\mathbf{u} \cdot (t\mathbf{v}) = t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ voidaan todistaa vastaavasti.

Siis

$$(t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (t\mathbf{v}) = t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}).$$

Sivuutetaan kohtien (c)–(e) todistukset.



Reaaliluvuille a, b voidaan osoittaa kaava

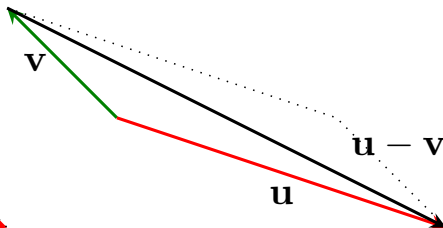
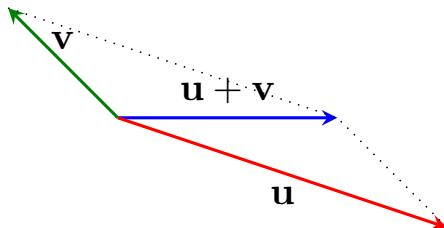
$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Saadaan vastaava lause

Lause

Jos u, v ovat vektoreita, niin

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = 2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{v}|^2.$$



$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = 2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{v}|^2$$

$$(2^2 + 0^2) + (4^2 + 2^2) = 2(3^2 + 1^2) + 2(1^2 + 1^2)$$

$$4 + 20 = 2 \cdot 10 + 2 \cdot 2$$

Lause

Jos u, v ovat vektoreita, niin

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = 2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{v}|^2.$$

Todistus.

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \\ &= [\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}] + [\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}] \\ &= 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\ &= 2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{v}|^2. \end{aligned}$$

