

Vektorilaskenta

Itä-Suomen yliopisto,
verkkomateriaali



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Taso kulkee pisteiden p , q ja r kautta.

Taso kulkee pisteiden p , q ja r kautta.

Siis tasolla on suuntavektorit $\mathbf{u} = q - p$ ja $\mathbf{v} = r - p$.

Taso kulkee pisteiden p , q ja r kautta.

Siis tasolla on suuntavektorit $\mathbf{u} = q - p$ ja $\mathbf{v} = r - p$.

Siis tasolla on parametrisointi

$$\begin{aligned} a(t, s) &= p + t\mathbf{u} + s\mathbf{v} \\ &= p + t(q - p) + s(r - p), \quad t, s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Taso kulkee pisteiden p , q ja r kautta.

Siis tasolla on suuntavektorit $\mathbf{u} = q - p$ ja $\mathbf{v} = r - p$.

Siis tasolla on parametrisointi

$$\begin{aligned} a(t, s) &= p + t\mathbf{u} + s\mathbf{v} \\ &= p + t(q - p) + s(r - p), \quad t, s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Antamalla parametreille t, s eri arvoja, saadaan kaikki tason eri pisteet. Esim.

$$a(0, 0) = p,$$

Taso kulkee pisteiden p , q ja r kautta.

Siis tasolla on suuntavektorit $\mathbf{u} = q - p$ ja $\mathbf{v} = r - p$.

Siis tasolla on parametrisointi

$$\begin{aligned} a(t, s) &= p + t\mathbf{u} + s\mathbf{v} \\ &= p + t(q - p) + s(r - p), \quad t, s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Antamalla parametreille t, s eri arvoja, saadaan kaikki tason eri pisteet. Esim.

$$a(0, 0) = p, a(1, 0) = p + q - p = q,$$

Taso kulkee pisteiden p , q ja r kautta.

Siis tasolla on suuntavektorit $\mathbf{u} = q - p$ ja $\mathbf{v} = r - p$.

Siis tasolla on parametrisointi

$$\begin{aligned} a(t, s) &= p + t\mathbf{u} + s\mathbf{v} \\ &= p + t(q - p) + s(r - p), \quad t, s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Antamalla parametreille t, s eri arvoja, saadaan kaikki tason eri pisteet. Esim.

$$a(0, 0) = p, a(1, 0) = p + q - p = q, a(0, 1) = p + r - p = r,$$

Taso kulkee pisteiden p , q ja r kautta.

Siis tasolla on suuntavektorit $\mathbf{u} = q - p$ ja $\mathbf{v} = r - p$.

Siis tasolla on parametrisointi

$$\begin{aligned} a(t, s) &= p + t\mathbf{u} + s\mathbf{v} \\ &= p + t(q - p) + s(r - p), \quad t, s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Antamalla parametreille t, s eri arvoja, saadaan kaikki tason eri pisteet. Esim.

$$a(0, 0) = p, a(1, 0) = p + q - p = q, a(0, 1) = p + r - p = r,$$

$$\begin{aligned} a(1, 1) &= p + q - p + r - p \\ &= q + r - p, \end{aligned}$$

Taso kulkee pisteiden p , q ja r kautta.

Siis tasolla on suuntavektorit $\mathbf{u} = q - p$ ja $\mathbf{v} = r - p$.

Siis tasolla on parametrisointi

$$\begin{aligned} a(t, s) &= p + t\mathbf{u} + s\mathbf{v} \\ &= p + t(q - p) + s(r - p), \quad t, s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

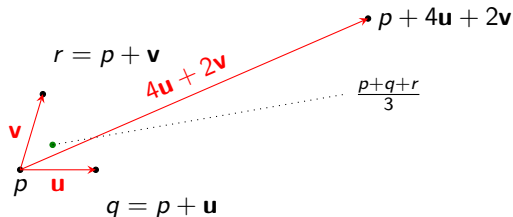
Antamalla parametreille t, s eri arvoja, saadaan kaikki tason eri pisteet. Esim.

$$a(0, 0) = p, a(1, 0) = p + q - p = q, a(0, 1) = p + r - p = r,$$

$$\begin{aligned} a(1, 1) &= p + q - p + r - p \\ &= q + r - p, \end{aligned}$$

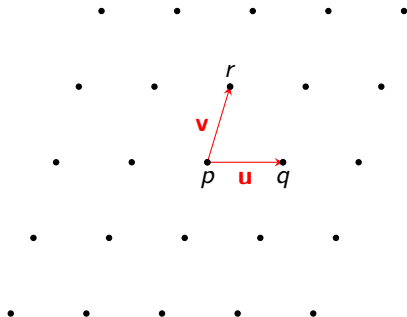
$$a\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = p + \frac{q - p}{3} + \frac{r - p}{3} = \frac{3p + q - p + r - p}{3} = \frac{p + q + r}{3}.$$

Pisteitä $a(t) = p + t(q - p) + s(r - p)$, $t, s \in \mathbb{R}$



Jos t ja s ovat kokonaislukuja, pisteet $a(t) = p + t(q - p) + s(r - p)$ muodostavat säännöllisen “pistepilven”, jota kutsutaan termillä **hila**.

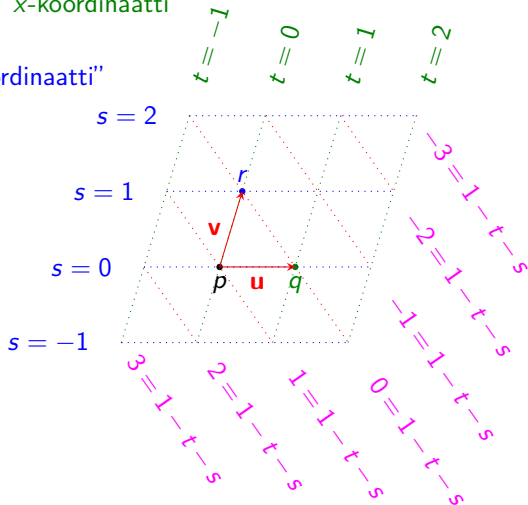
$$\text{Pisteitä } a(t) = p + t(q - p) + s(r - p), \quad t, r \in \mathbb{Z}$$



Pisteitä $a(t, s) = p + t(q - p) + s(r - p)$, $t, r \in \mathbb{R}$

“x-koordinaatti”

“y-koordinaatti”



Pisteiden p, q, r kertoimet hahmottaa helposti apuviivaston avulla.

Huomaa, että jos $p = 0$, $u = (1, 0)$, $v = (0, 1)$, niin $p + tu + sv = (t, s)$.

“kolmas koordinaatti”

Pisteen

$$a(t, s) = p + t(q - p) + s(r - p), \quad t, r \in \mathbb{R}$$

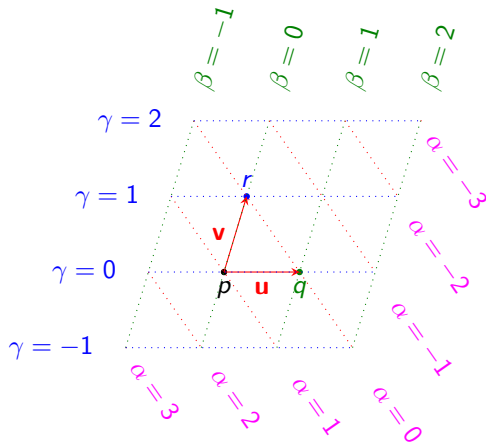
voi parametrisoida myös kolmen parametrin α, β, γ avulla.

Nimittäin

$$\begin{aligned} a(t, s) &= p + t(q - p) + s(r - p) \\ &= p + tq - tp + sr - sp \\ &= (1 - t - s)p + tq + sr \\ &= \alpha p + \beta q + \gamma r = a(\alpha, \beta, \gamma), \end{aligned}$$

missä $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ja $\alpha + \beta + \gamma = (1 - t - s) + t + s = 1$.

Pisteitä $a(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha p + \beta q + \gamma r$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$



Pisteiden p, q, r kertoimet hahmottaa helposti apuviivaston avulla.

Huomaa, että jos $p = 0$, $\mathbf{u} = (1, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1)$, niin

$$\alpha p + \beta q + \gamma r = \beta q + \gamma r.$$

Esimerkki

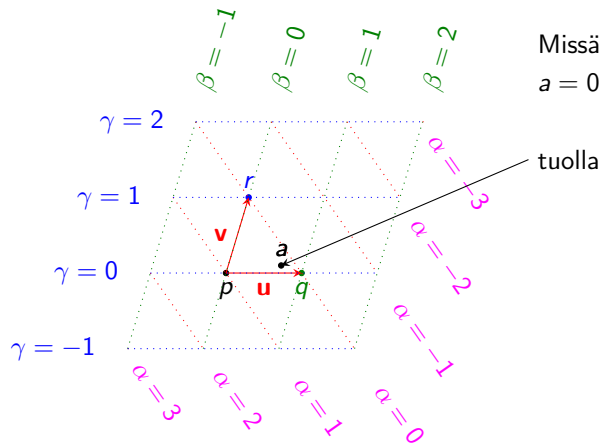
Olkoot p, q, r pisteitä. Missä on piste

$$a = 0.2p + 0.7q + 0.1r?$$

Koska $0.2 + 0.7 + 0.1 = 1$, niin a on painotettu keskiarvo pisteistä p, q, r . Siis a on pisteiden p, q, r määräämässä tasossa. Kaikki luvuista $0.2, 0.7, 0.1$ ovat välillä $[0, 1]$, joten a on kolmion pqr sisällä. Arvo 0.7 on suurin, joten piste a on melko lähellä pistettä q eli karkeasti sanottuna

$$a = 0.2p + 0.7q + 0.1r \approx 0 \cdot p + 1 \cdot q + 0 \cdot r = q.$$

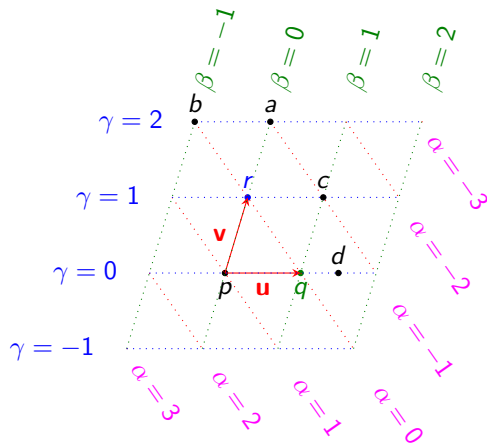
Pisteitä $a(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha p + \beta q + \gamma r$.



Missä on piste

$$a = 0.2p + 0.7q + 0.1r?$$

Pisteitä $a(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha p + \beta q + \gamma r$.



Missä ovat seuraavat pisteet?

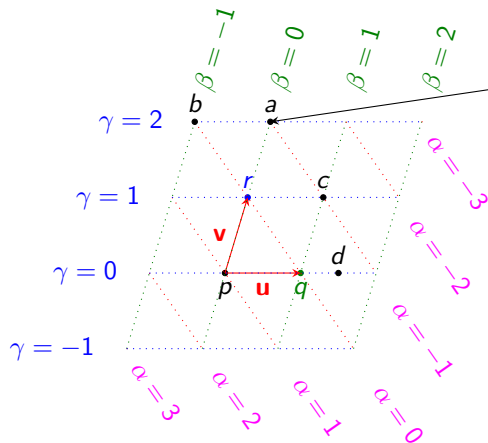
$$a = 2r - p$$

$$b = 2r - q$$

$$c = r + q - p$$

$$d = 1.5q - 0.5p$$

Pisteitä $a(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha p + \beta q + \gamma r$.



Missä ovat seuraavat pisteet?

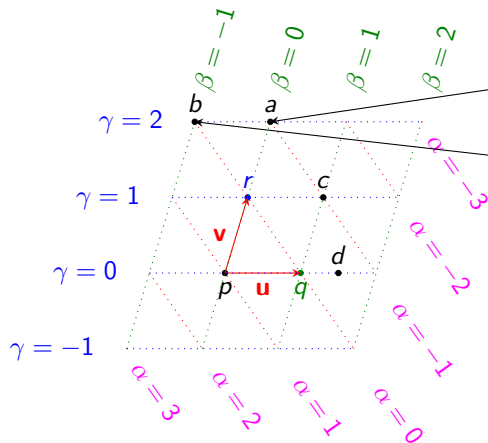
$$a = 2r - p$$

$$b = 2r - q$$

$$c = r + q - p$$

$$d = 1.5q - 0.5p$$

Pisteitä $a(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha p + \beta q + \gamma r$.



Missä ovat seuraavat pisteet?

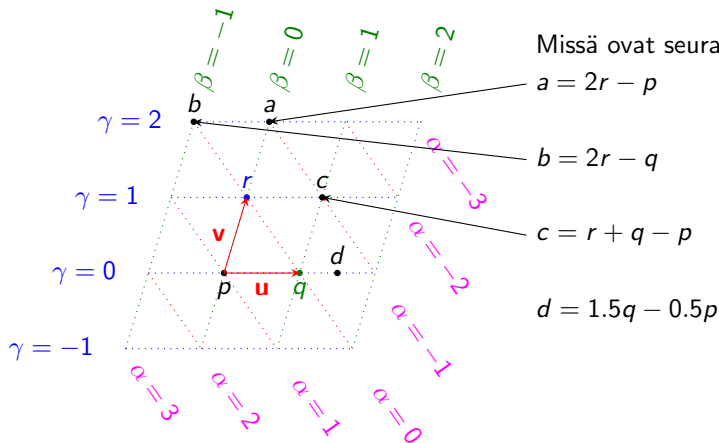
$$a = 2r - p$$

$$b = 2r - q$$

$$c = r + q - p$$

$$d = 1.5q - 0.5p$$

Pisteitä $a(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha p + \beta q + \gamma r$.



Pisteitä $a(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha p + \beta q + \gamma r$.

