

1 Vektorilaskennan tehtäviä

1. (a) Olkoot $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Osoita, että

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

Kyseessä on osittelulaki, Lause 5.2.4 (c).

2. Olkoot $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ ja $a, b \in \mathbb{R}$. Sievennä

(a)

$$(\mathbf{u} + \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) - (\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}$$

olettaen, että $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{w}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

(b)

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}).$$

(c)

$$((\mathbf{u} \times a\mathbf{v}) + (\mathbf{v} \times b\mathbf{u})) + ((\mathbf{u} + a\mathbf{v}) \times (\mathbf{v} + b\mathbf{u}))$$

3. (a) Olkoot $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ avaruuden $\mathbb{R}^2$ tai $\mathbb{R}^3$ vektoreita. Mitä voit sanoa vektoreiden välisestä kulmasta, kun vektoreiden pistetulo $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$? Entä, kun $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$? Entä, kun $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$? Anna esimerkki ja havainnollista tilannetta graafisesti.

(b) Olkoon $t \in \mathbb{R}$ vakio. Osoita, että vektoreiden $\mathbf{a} = +2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ ja $\mathbf{b} = t - 2\mathbf{j} + (1 - 2t)\mathbf{k}$ välinen kulma on tylppä kaikilla reaaliluvuilla t . Etsi lisäksi luku t , jolla vektorien kärkien välinen jana on mahdollisimman lyhyt.

4. Tarkastellaan tason vektoreita $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$, jotka ovat toisiinsa nähden 120° asteen kulmassa eli pareittain vektoreiden välinen kulma on 120° . Tiedetään, että $\mathbf{w} = -(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ ja $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = 1$. Perustelee vektorialgebran keinoin (ei siis kuvasta katsoen), mitä on $|\mathbf{w}|$. Entä mitä on $|\mathbf{w}|$, jos vektoreiden $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ välinen kulma muuttuu arvoon 90° muiden kulmien muuttuessa arvoon 135° .

5. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan päätepisteet ovat $(1, 1, 1)$ ja $(2, 3, 4)$. Kolmion yksi kaiteetti on vektorin $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ suuntainen. Mikä on kolmion kolmas kärkipiste?

6. Oletetaan, että $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ siten, että

$$\mathbf{u} = (\cos \beta) + (\sin \beta)\mathbf{j} \quad \text{ja} \quad \mathbf{v} = (\cos \alpha) + (\sin \alpha)\mathbf{j}.$$

(a) Osoita kaava

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

tarkastelemalla vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ristituloa, kun $0 < \alpha - \beta < \pi$.

(b) Osoita kaava

$$\sin(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

tarkastelemalla vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ pistetuloa, kun $0 < \alpha - \beta < \pi$.

7. Etsi ne avaruuden $\mathbb{R}^3$ yksikkövektorit, jotka ovat vektorien

$$\mathbf{u} = +2\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \text{ja} \quad \mathbf{v} = -\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

kanssa saman tason suuntaisia sekä jotka ovat kohtisuorassa vektoria

$$\mathbf{w} = +\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

vastaan. Hahmottele tilanteesta kuva.

8. Lentokone lähtee nousuun vektorin $\mathbf{v} = -20 + 10\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ suuntaisesti vaakatasoa kuvaavan xy -tason pisteestä $(1500, 2000)$. Samassa koordinaatistossa maantietä esittää yhtälö $2x + y = 200$. Millä korkeudella lentokone ylittää maantien? Koordinaatistossa pituusyksikkö on 1m.
9. Pisteestä $(10, 0, 0)$ lähetetään valonsäde suuntaan $\mathbf{v}_1 = 2 + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ja pisteestä $(310, 480, 400)$ suuntaan $\mathbf{v}_2 = -4 - 6\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$. Tutki ja osoita, kohtaavatko valonsäteet toisensa. Jos kohtaavat, niin määritä kyseinen piste.
10. Suora kulkee pisteen $(1, 2, 3)$ kautta ja on yhdensuuntainen pisteiden $(-1, 3, 0)$ ja $(0, 1, 2)$ kautta kulkevan suoran kanssa. Määritä suoran parametriesitys sekä vektorimuodossa että koordinaattimuodossa. Määritä lisäksi suoran yhtälö normaalimuodossa. Määritä se suoran piste, joka on lähinnä pistettä $(0, -2, 1)$
- (a) käyttämällä Lausetta 5.4.7. (b) käyttämättä Lausetta 5.4.7.
11. Määrää yhtälö tasolle, joka kulkee pisteiden $(1, 2, 3)$ ja $(3, 2, 1)$ kautta ja on kohtisuorassa tasoa $4x - y + 2z = 7$ vastaan.
12. Määrää yhtälö sellaisille tasoille, jotka kulkevat tasojen $x - 2y + 4z - 2 = 0$ ja $2x + y + 3z + 1 = 0$ leikkaussuoran kautta ja joista pisteet $(3, 2, 1)$ ja $(1, -4, -5)$ ovat yhtä etäällä.
13. Määrää suoran
- $$x - 2 = \frac{y + 3}{2} = \frac{z - 1}{4}$$
- ja tason $2y - z = 1$ välinen etäisyys.
14. Määrää tasojen $2x + 3y - z = 0$ ja $x - 4y + 2z = -5$ välinen etäisyys.
15. Olkoot a, b, c, d reaalityyppisiä lukuja ja $abcd \neq 0$.
- (a) Tarkastellaan suoraa
- $$ax + by = c,$$
- jonka yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa
- $$\frac{x}{c/a} + \frac{y}{c/b} = 1.$$
- Missä pisteessä suora leikkaa x -akselin? Missä pisteessä suora leikkaa y -akselin?
- (b) Tarkastellaan tasoa
- $$ax + by + cz = d.$$
- Missä pisteissä taso leikkaa koordinaattiakselit?
- (c) Tarkastellaan ellipsoidia
- $$ax^2 + by^2 + cz^2 = d.$$
- Missä pisteissä ellipsoidi leikkaa koordinaattiakselit?
16. Lentokone lentää 750 km/h suuntaan x . Miten suunta x on valittava, jotta lentokoneen todellinen lentosuunta on itään, kun se lentää 100 km/h puhaltavassa koillistuulella? Kuinka kauan matka kestää kaupunkiin, joka on 1500 km päässä lähtöpisteestä itään?
17. Mies seisoo 100 metriä karhusta etelään. Hän kävelee 100 metriä itään, kääntyy pohjoiseen, laukaisee kiväärinsä kohti pohjoista ja osuu karhuun. Minkä värinen karhu on ja miksi? Mieti eri vaihtoehdot ja perustele.

18. Tutki ja osoita käyttämällä ristituloa, onko vektori $\mathbf{v} = 3 - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ kohtisuorassa pisteiden $(1, -3, 0)$, $(4, 0, 3)$ ja $(5, 2, 2)$ kulkevaa tasoa vastaan. Hahmottele tilanteesta kuva.
19. Etsi ne avaruuden $\mathbb{R}^3$ yksikkövektorit, jotka ovat vektorien $\mathbf{u} = +2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = -\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ kanssa saman tason suuntaisia sekä, jotka ovat kohtisuorassa vektoria $\mathbf{w} = +\mathbf{j} + \mathbf{k}$ vastaan. Hahmottele tilanteesta kuva.
20. Määrää yhtälöt kahdelle (eri) tasolle, joiden leikkaussuora on

$$\{x = 1 + ty = 2 - tz = 3 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

21. Määrää suoran

$$\{x = -2 + 4ty = 1 - tz = 5 + 3t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

ja tason $2x - 3y + z = 10$ välinen etäisyys.

2 Tehtävätyyppejä

- sievennys
- pistetulo ja kulma
- erotuksen sini ja kosini

Reaalimaailma

- vektorisumma (lentokone ja tuuli)
- suorat (lentokone ja tie)
- valonsäde
- koirat kiinni naruissa
- lampaat kiinni naruissa

3 Ideoita tehtäviksi

1. Kolme koiraa viettävät aikaa kerrostalojen vaakasuoralla sisäpihalla, jossa ei ole puiden lisäksi muita esteitä.

Aku-koiran hihna (pituus 5m) on kiinnitetty lyhtypylvääseen pisteessä $(0, 0)$.

Beethoven-koiran hihna (pituus 5m) on kiinni juoksulangassa. Juoksulanka puolestaan on virittetty pisteiden $(5, 0)$ ja $(5, 5)$ välille kolmen metrin korkeuteen.

Camilla-koira on häkissä (nurkat $(0, 5)$, $(0, 7)$, $(2, 5)$, $(2, 7)$).

Piirrä tilanteesta kuva. Ketkä koirista pääsevät lähimmäksi toisiaan? Koordinaatiston yksikkö on 1m. Yksikään koira ei pääse koskettamaan talon seinää.

(sama tehtävä, mutta koirien sijasta lampaita. Kuinka suuren alueen lampaat voivat syödä?)