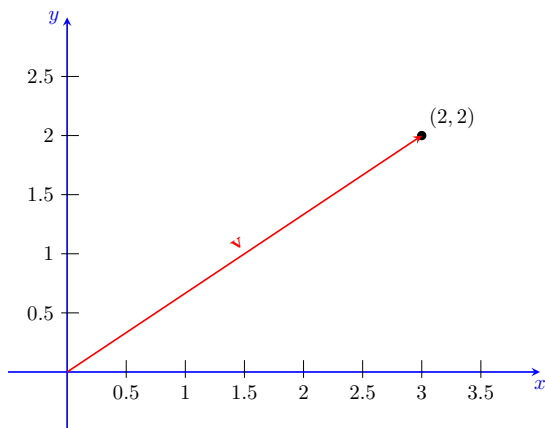


5. VEKTORIT AVARUUKSISSA $\mathbb{R}^2$ JA $\mathbb{R}^3$

5.1. Vektori ja sen ominaisuuksia. Fysiikassa on sekä skalaarisuureita että vektorisuureita. Skalaarisuureita ovat esimerkiksi massa, pituus, aika ja lämpötila. Vektorisuureita ovat esimerkiksi nopeus, kiihtyvyys, voima ja momentti. Yleisesti voidaan sanoa, että vektorilla on suuruus sekä suunta ja skalaarilla ainoastaan suuruus.

Tason $\mathbb{R}^2$ jokaiseen pisteeseen (x, y) voidaan liittää (paikka)vektori $\mathbf{v}$, jolla on suunta ja pituus. Graafisesti tämä tarkoittaa suunnattua janaa, joka alkaa origosta ja päättyy pisteeseen (x, y) . Kuvassa 15 on esitetty pisteeseen $(2, 2)$ liitetty paikkavektori $\mathbf{v}$.



KUVA 15. Pisteeseen $(2, 2)$ liitetty paikkavektori $\mathbf{v}$.

Vektorin pituus, jota merkitään $|\mathbf{v}|$, on kyseisen janan pituus eli

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Joskus merkitään myös $\mathbf{v} = (x, y)$ (eli samaistetaan tason piste (x, y) ja vektori $\mathbf{v}$) tai

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

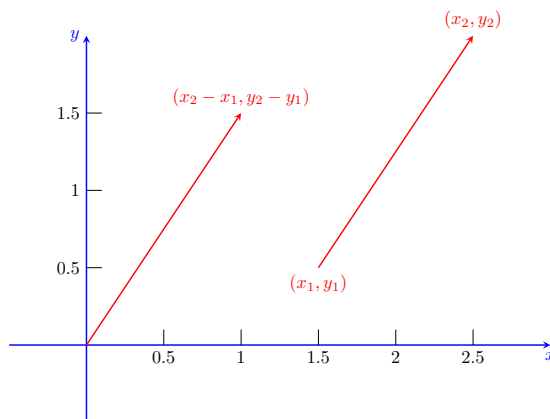
Vastaavasti avaruuden $\mathbb{R}^3$ jokaiseen pisteeseen (x, y, z) voidaan liittää vektori $\mathbf{v}$, jonka pituus

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Merkitään myös $\mathbf{v} = (x, y, z)$ tai

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Huomautus 5.1.1. Usein fysiikassa tarkastellaan suunnattua janaa $\overrightarrow{PQ}$ pisteestä $P = (x_1, y_1)$, joka ei ole origo, pisteeseen $Q = (x_2, y_2)$. Tällöin puhutaan myös tason vektorista. Kyseisen vektorin komponentit ovat $x_2 - x_1$ ja $y_2 - y_1$ eli $\overrightarrow{PQ}$ voidaan esittää vektorina $\mathbf{v}$, joka lähtee origosta ja päättyy pisteeseen $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 16. Vastaavasti avaruudessa $\mathbb{R}^3$ suunnattu jana $\overrightarrow{PQ}$ pisteestä $P = (x_1, y_1, z_1)$, joka ei ole origo, pisteeseen $Q = (x_2, y_2, z_2)$ voidaan esittää vektorina $\mathbf{v}$ origosta pisteeseen $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ eli vektorin $\mathbf{v}$ komponentit ovat $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ ja $z_2 - z_1$.



KUVA 16. Vektorit, joilla on sama suunta ja suuruus.

Vektorien sanotaan olevan samat, jos niiden komponentit ovat yhtäsuuret. Jos vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat samat, niin merkitään $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Jos vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ eivät ole samat, merkitään $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$. Tällä opintojaksolla riittävät määritelmät vektorien yhteenlaskulle ja skalaarilla kertomiselle on esitetty Määritelmissä 5.1.2 ja 5.1.3. Vektorien laskutoimituksiin palataan tarkemmin opintojaksolla Lineaarialgebra a.

Määritelmä 5.1.2. Kaksi tason tai avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoria $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ lasketaan yhteen siten, että niitä vastaavat suunnatut janat asetetaan

alkamaan samasta pisteestä ja summavektorin $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ edustajana oleva suunnattu jana muodostetaan syntyvän suunnikkaan lävistäjänä, mikäli vektorit eivät ole yhdensuuntaiset. Jos vektorit ovat yhdensuuntaiset, asetetaan vektoria $\mathbf{v}$ vastaava suunnattu jana alkamaan vektoria $\mathbf{u}$ vastaavan suunnatun janan loppupisteestä ja summavektorin $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ edustajana oleva suunnattu jana muodostetaan vektoria $\mathbf{u}$ vastaavan suunnatun janan alkupisteestä vektoria $\mathbf{v}$ vastaavan suunnatun janan loppupisteeseen.

Määritelmä 5.1.3. Vektori $\mathbf{v}$ kerrotaan skalaarilla eli reaaliluvulla t siten, että sen pituus kerrotaan itseisarvolla $|t|$ ja sen suunta säilyy samana, jos $t > 0$, tai kääntyy vastakkaiseksi, jos $t < 0$. Jos $t = 0$, saadaan vektori, jonka pituus on nolla. Vektorin $\mathbf{v}$ skalaarikerrannaista merkitään $t\mathbf{v}$.

Huomautus 5.1.4. Olkoot vektorin $\mathbf{u}$ komponentit a ja b sekä vektorin $\mathbf{v}$ komponentit x ja y . Tällöin summavektorin $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ komponentit ovat $a + x$ ja $b + y$. Olkoon lisäksi $t \in \mathbb{R}$. Tällöin vektorin $t\mathbf{v}$ komponentit ovat tx ja ty .

Olkoon $\mathbf{i}$ tason vektori origosta pisteeseen $(1, 0)$ ja $\mathbf{j}$ tason vektori origosta pisteeseen $(0, 1)$. Vektoreita $\mathbf{i}$ ja $\mathbf{j}$ sanotaan tason $\mathbb{R}^2$ luonnollisiksi kantavektoreiksi. Vektori $\mathbf{r}$, jonka komponentit ovat x ja y , voidaan esittää muodossa

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

eli niin sanottuna vektorien $\mathbf{i}$ ja $\mathbf{j}$ lineaarikombinaationa.

Vastaavasti olkoon $\mathbf{i}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektori origosta pisteeseen $(1, 0, 0)$, $\mathbf{j}$ vektori origosta pisteeseen $(0, 1, 0)$ ja $\mathbf{k}$ vektori origosta pisteeseen $(0, 0, 1)$. Vektoreita $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ja $\mathbf{k}$ sanotaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ luonnollisiksi kantavektoreiksi. Vektori $\mathbf{r}$, jonka komponentit ovat x , y ja z , voidaan esittää vektorien $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ja $\mathbf{k}$ lineaarikombinaationa

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Kuvassa 17 on esitetty avaruuden $\mathbb{R}^3$ luonnolliset kantavektorit ja vektori $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Huomautus 5.1.5. Olkoon $t \in \mathbb{R}$ ja vektorit

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}, \\ \mathbf{v} &= x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}.\end{aligned}$$



KUVA 17. Avaruuden $\mathbb{R}^3$ luonnolliset kantavektorit ja vektori $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Tällöin

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (x_1 + x_2)\mathbf{i} + (y_1 + y_2)\mathbf{j} + (z_1 + z_2)\mathbf{k} \\ t\mathbf{u} &= (tx_1)\mathbf{i} + (ty_1)\mathbf{j} + (tz_1)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Lause 5.1.6. Olkoot $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ avaruuden $\mathbb{R}^2$ tai $\mathbb{R}^3$ vektoreita ja $t \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= \mathbf{v} + \mathbf{u} \\ (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} &= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \\ \mathbf{u} - \mathbf{v} &= \mathbf{u} + (-1)\mathbf{v} \\ t(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= t\mathbf{u} + t\mathbf{v}\end{aligned}$$

Todistus. Helppoja.

□

Seuraavaksi sovitaan nimitykset tietyille vektoreille. Sanotaan, että $\mathbf{v}$ on yksikkövektori, jos sen pituus on 1. Huomataan heti, että esimerkiksi vektorit $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ja $\mathbf{k}$ ovat yksikkövektoreita. Sanotaan, että vektori $\mathbf{0} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ on nollavektori (vastaavasti tasossa $\mathbb{R}^2$). Nollavektorin pituus on nolla eikä sillä ole määrättyä suuntaa. Jos vektori $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, niin vektoria

$$\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

sanotaan vektorin $\mathbf{v}$ suuntavektoriksi.

Esimerkki 5.1.7. Olkoon vektorit

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \\ \mathbf{v} &= 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (2 + 3)\mathbf{i} + (1 - 2)\mathbf{j} + (-2 - 1)\mathbf{k} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \\ 3\mathbf{u} &= (3 \cdot 2)\mathbf{i} + (3 \cdot 1)\mathbf{j} + (3 \cdot (-2))\mathbf{k} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}, \\ 3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} &= (6 - 6)\mathbf{i} + (3 + 4)\mathbf{j} + (-6 + 2)\mathbf{k} = 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \\ |\mathbf{u}| &= \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3 \\ \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} &= \frac{1}{|\mathbf{u}|}\mathbf{u} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}.\end{aligned}$$

5.2. Pistetulo.

Määritelmä 5.2.1. Vektorien $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ pistetulo on

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Huomautus 5.2.2. Vastaavasti määritellään pistetulo tasossa $\mathbb{R}^2$.

Esimerkki 5.2.3. Vektorien $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ pistetulo on

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 10.$$

Lause 5.2.4. Olkoot $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ avaruuden $\mathbb{R}^2$ tai $\mathbb{R}^3$ vektoreita ja c skalaari. Tällöin

- a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$,
- b) $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$,
- c) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$,
- d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$,
- e) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$.

Todistus. Todistetaan malliksi b)-kohta ja d)-kohta. Oletetaan, että vakio $c \in \mathbb{R}$ ja vektorit $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Merkitään $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$. Osoitetaan, että $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$. Saadaan, että

$$\begin{aligned}(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} &= ((cu_1)\mathbf{i} + (cu_2)\mathbf{j} + (cu_3)\mathbf{k}) \cdot (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) \\&= (cu_1)v_1 + (cu_2)v_2 + (cu_3)v_3 \\&= c(u_1v_1) + c(u_2v_2) + c(u_3v_3) \\&= c(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) \\&= c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}).\end{aligned}$$

Näin saatiin osoitettua b)-kohta. Osoitetaan nyt, että $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$. Saadaan, että

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} &= u_1u_1 + u_2u_2 + u_3u_3 \\&= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \\&= (\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2})^2 \\&= |\mathbf{u}|^2.\end{aligned}$$

Saatiin siis osoitettu d)-kohta. □

Huomautus 5.2.5. Lauseen 5.2.4 d)-kohdan nojalla vektorin pituus voidaan laskea myös muodossa

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}.$$

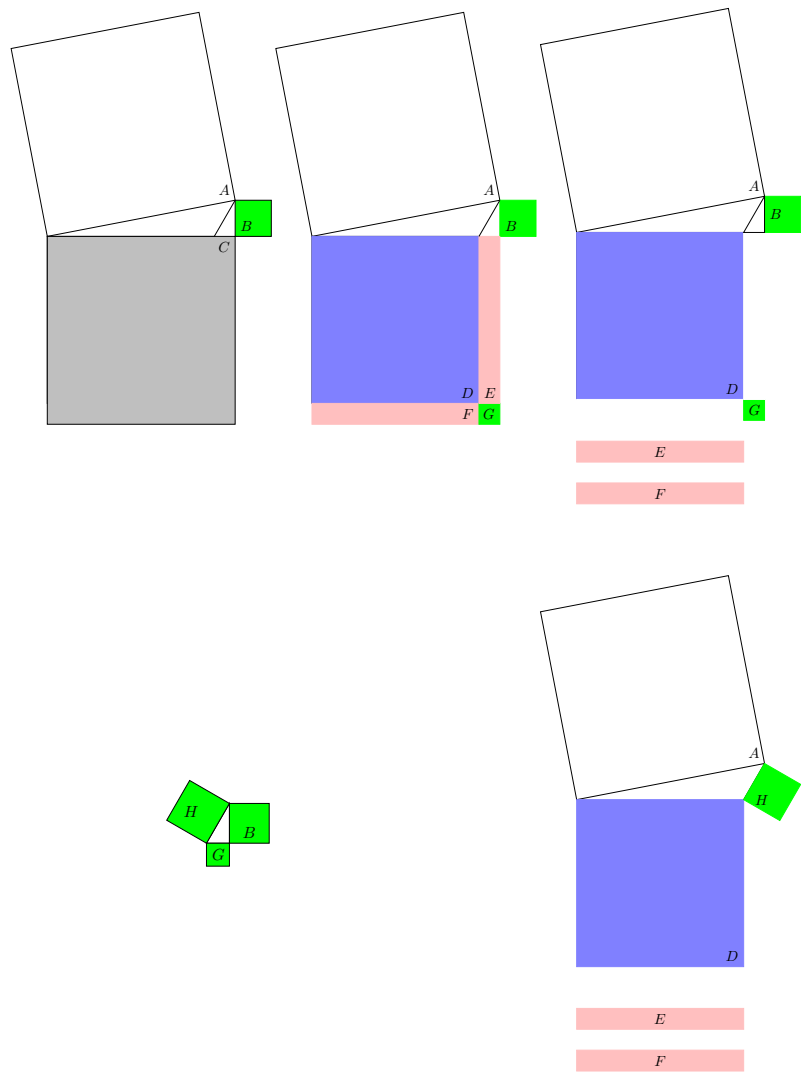
Osoitetaan seuraavaksi (jo kenties lukiosta tuttu) Kosinilause. Kosinilauseetta tarvitaan Lauseessa 5.2.7, joka esittelee vektorien välisen kulman.

Lause 5.2.6. *(Kosinilause) Tarkastellaan kolmiota ABC ja kulmaa θ , joka on sivujen CB ja CA välinen kulma. Olkoot vastaavat sivut pituuksiltaan a ja b . Tällöin kolmion kolmannen sivun pituudelle c on voimassa*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta.$$

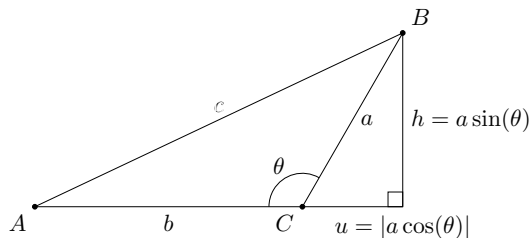
Kosinilause voidaan todistaa myös geometrisesti käyttämällä kaksi kertaa Pythagoraan lausetta (*).
 Kuviin merkityille alueille $A, B, \dots, H$ pätee

$$\begin{aligned} A &\stackrel{(*)}{=} B + C \\ &= B + (D + E + F + G) \\ &= D + (B + G) + E + F \\ &\stackrel{(*)}{=} D + H + E + F. \end{aligned}$$



Todistus. Tarkastellaan tilannetta geometrisesti (katso Kuva 18).

vektorit-r2-r3/kuva18.pdf



KUVA 18. Kolmio ABC .

Havaitaan, että

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{u}{a} \iff u = a \cos(\pi - \theta).$$

Edelleen

$$\sin(\pi - \theta) = \frac{h}{a} \iff h = a \sin(\pi - \theta).$$

Kosinin ja sinin ominaisuuksien perusteella tiedetään, että

$$\begin{aligned} \cos(\pi - \theta) &= -\cos \theta, \\ \sin(\pi - \theta) &= \sin \theta. \end{aligned}$$

Pythagoraan lauseen nojalla saadaan, että

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (b + u)^2 \\ &= (a \sin(\pi - \theta))^2 + (b + a \cos(\pi - \theta))^2 \\ &= (a \sin(\theta))^2 + (b - a \cos \theta)^2 \\ &= a^2 \sin^2 \theta + b^2 - 2ab \cos \theta + a^2 \cos^2 \theta \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta. \end{aligned}$$

Todistus menee vastaavasti, jos kulma θ on terävä. □

Lause 5.2.7. Olkoot $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ ja $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ vektoreita. Tällöin vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ välinen kulma θ on

$$\theta = \arccos \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \right).$$

Todistus. Todetaan, että vektorien välinen kulma $\theta \in [0, \pi]$. Merkitään $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. Kosinilauseen 5.2.6 nojalla

$$|\mathbf{w}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta.$$

Lauseen 5.2.4 d)-kohdan nojalla saadaan

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta.$$

Pistetulon määritelmän nojalla, kun $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$, saadaan

$$\begin{aligned} (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2 \\ = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta. \end{aligned}$$

Edelleen

$$\begin{aligned} u_1^2 - 2u_1v_1 + v_1^2 + u_2^2 - 2u_2v_2 + v_2^2 + u_3^2 - 2u_3v_3 + v_3^2 \\ = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta. \end{aligned}$$

Sieventämällä saadaan

$$\begin{aligned} -2u_1v_1 - 2u_2v_2 - 2u_3v_3 &= -2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta \\ \iff u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 &= |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta \\ \iff \cos \theta &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}. \end{aligned}$$

Täten vektorien välinen kulma

$$\theta = \arccos \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \right),$$

missä $0 \leq \theta \leq \pi$. □

Huomautus 5.2.8. Lauseesta 5.2.7 seuraa, että $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta$.

Esimerkki 5.2.9. Tarkastellaan vektoreita $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Tällöin

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-1) = 6, \\ |\mathbf{u}| &= \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3, \\ |\mathbf{v}| &= \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}, \\ \theta &= \arccos \left(\frac{6}{3\sqrt{14}} \right) \approx 57.69^\circ. \end{aligned}$$

Määritelmä 5.2.10. Kaksi vektoria ovat ortogonaaliset eli kohtisuorassa toisiaan vastaan, kun niiden välinen kulma on $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Esimerkki 5.2.11. Vektorit $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ja $\mathbf{k}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Määritelmä 5.2.12. Olkoot $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ vektoreita ja $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Olkoon θ vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ välinen kulma siten, että $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Vektorin $\mathbf{u}$ skalaariprojektio vektorilla $\mathbf{v}$ on luku

$$u_{\mathbf{v}} = |\mathbf{u}| \cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|},$$

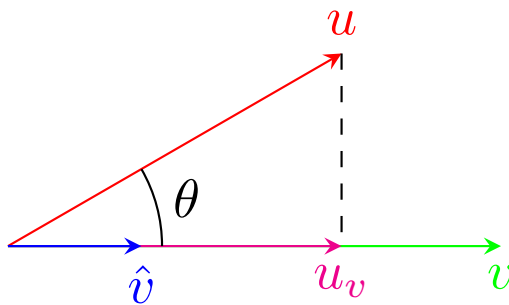
missä $\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$. Vektorin $\mathbf{u}$ vektoriprojektio vektorilla $\mathbf{v}$ on vektori

$$\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = u_{\mathbf{v}} \mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v},$$

missä $\mathbf{v}_0$ on vektorin $\mathbf{v}$ suuntavektori. Vektorin $\mathbf{u}$ vektoriprojektiota vektorilla $\mathbf{v}$ merkitään myös $\mathbf{u}_{\mathbf{v}}$.

Vektorin skalaariprojektiota ja vektoriprojektiota on havainnollistettu Kuvassa 19.

vektorit-r2-r3/kuva19.pdf



KUVA 19. Vektoriprojektio $\mathbf{u}_{\mathbf{v}}$.

Esimerkki 5.2.13. Tarkastellaan vektoreita $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ja $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Esitetään vektori $\mathbf{a}$ muodossa $\mathbf{a} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, missä $\mathbf{u}$ on vektorin $\mathbf{b}$ suuntainen ja $\mathbf{v}$ on kohtisuorassa vektoria $\mathbf{b}$ vastaan. Tehtävä on siis määrätä vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$.

Koska $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{b}$ ovat yhdensuuntaisia, niin

$$\mathbf{u} = t\mathbf{b} = t(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

jollakin $t \in \mathbb{R}$. Koska $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, niin $\mathbf{v} \cdot \mathbf{b} = 0$. Halutaan vektori $\mathbf{a}$ muodossa $\mathbf{a} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. Täten siis $3\mathbf{i} + \mathbf{j} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.

Lasketaan vektorin $\mathbf{a}$ pistetulo vektorin $\mathbf{b}$ kanssa. Saadaan

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}.$$

Koska $\mathbf{u} = t(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ ja $\mathbf{v} \cdot \mathbf{b} = 0$, niin

$$(3\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = (t(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})) \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

Laskemalla pistetulot saadaan

$$4 = 3t \iff t = \frac{4}{3}.$$

Täten

$$\mathbf{u} = \frac{4}{3}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

ja

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{a} - \mathbf{u} \\ &= (3\mathbf{i} + \mathbf{j}) - \frac{4}{3}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ &= \frac{5}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{4}{3}\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Tehtävä voidaan ratkaista myös toisella tavalla. Vektori $\mathbf{u}$ on itse asiassa vektorin $\mathbf{a}$ vektoriprojektio vektorilla $\mathbf{b}$. Siis

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{a}_b \\ &= \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b} \\ &= \frac{(3\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})}{|\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}|^2} (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ &= \frac{4}{3}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}). \end{aligned}$$

ja edelleen

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{a} - \mathbf{u} \\ &= (3\mathbf{i} + \mathbf{j}) - \frac{4}{3}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ &= \frac{5}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{4}{3}\mathbf{k}. \end{aligned}$$

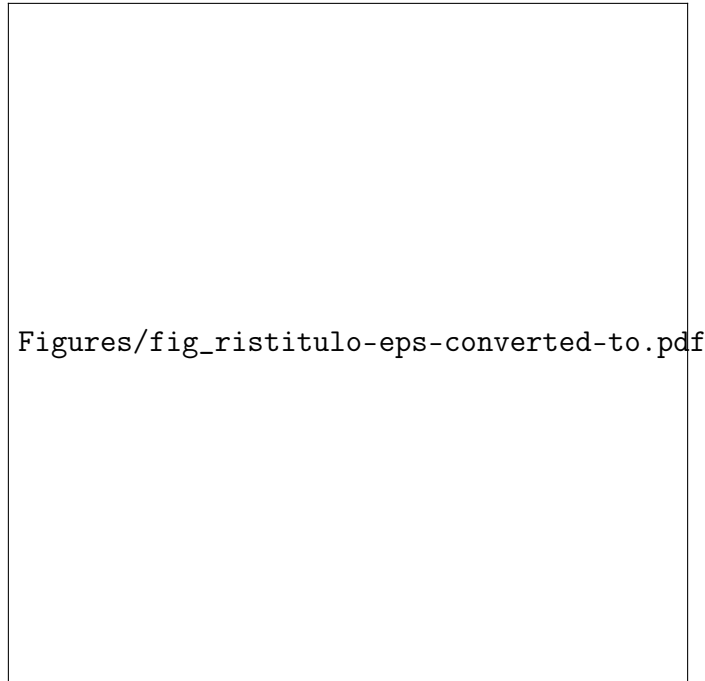
5.3. Vektori- eli ristitulo.

Määritelmä 5.3.1. Olkoot $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita. Olkoon $\mathbf{w}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektori siten, että

- i) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$ ja $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$,
- ii) $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$, missä θ on vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ välinen kulma ja
- iii) järjestetty kolmikko $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ on positiivisesti suunnistettu (oikean käden systeemi).

Tällöin $\mathbf{w}$ on vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ristitulo ja merkitään $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Esimerkki 5.3.2. Kuvassa 20 on esitetty vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ristitulo $\mathbf{w}$.



KUVA 20. Vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ristiulo $\mathbf{w}$.

Lause 5.3.3. Olkoot $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$. Tällöin

$$(1) \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}.$$

Todistus. Merkitään $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Osoitetaan, että $\mathbf{w}$ toteuttaa Määritelmässä 5.3.1 olevat ehdot. Osoitetaan ensin, että $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$. Pistetulon

määritelmän nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} &= u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1) \\
 &= u_1u_2v_3 - u_1u_3v_2 + u_2u_3v_1 - u_2u_1v_3 + u_3u_1v_2 - u_3u_2v_1 \\
 &= u_1u_2v_3 - u_1u_2v_3 + u_2u_3v_1 - u_2u_3v_1 + u_1u_3v_2 - u_1u_3v_2 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Vastaavasti saadaan, että $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$. Osoitetaan sitten, että $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\theta$. Saadaan, että

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2\sin^2\theta &= |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2(1 - \cos^2\theta) \\
 &= |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2\cos^2\theta \\
 &= |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 - (|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta)^2 \\
 &= |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \\
 &= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 \\
 &= u_1^2v_1^2 + u_1^2v_2^2 + u_1^2v_3^2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_2^2v_3^2 \\
 &\quad + u_3^2v_1^2 + u_3^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 \\
 &\quad - u_1^2v_1^2 - u_1v_1u_2v_2 - u_1v_1u_3v_3 \\
 &\quad - u_2v_2u_1v_1 - u_2^2v_2^2 - u_2v_2u_3v_3 \\
 &\quad - u_3v_3u_1v_1 - u_3v_3u_2v_2 - u_3^2v_3^2 \\
 &= u_2^2v_3^2 - 2u_2v_3u_3v_2 + u_3^2v_2^2 \\
 &\quad + u_3^2v_1^2 - 2u_3v_1u_1v_3 + u_1^2v_3^2 \\
 &\quad + u_1^2v_2^2 - 2u_1v_2u_2v_1 + u_2^2v_1^2 \\
 &= (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \\
 &= |\mathbf{w}|^2.
 \end{aligned}$$

Siis $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\theta$.

Osoitetaan vielä, että kolmikko $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ on positiivisesti suunnistettu. Kierretään koordinaatistoa siten, että $\mathbf{u}$ on positiivisella x -akselilla ja $\mathbf{v}$ on xy -tason siinä puolikkaassa, jossa pisteiden y -koordinaatti on ei-negatiivinen. Tällöin voidaan merkitä

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} &= x_1\mathbf{i}, \\
 \mathbf{v} &= x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j},
 \end{aligned}$$

missä $x_1 > 0$ ja $y_2 > 0$. Tällöin vektorin $\mathbf{w} = x_1y_2\mathbf{k}$, missä $x_1y_2 > 0$, suunta on positiivisen z -akselin suuntaan ja kolmikko $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ on positiivisesti suunnistettu. Siis vektori $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, joka määrätään yhtälön (1) nojalla, toteuttaa Määritelmän 5.3.1 ehdot eli se on vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ristitulo. $\square$

Esimerkki 5.3.4. Tarkastellaan vektoreita $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = -2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$. Tällöin

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (1 \cdot 5 - (-3) \cdot (-2))\mathbf{i} + ((-3) \cdot 0 - 2 \cdot 5)\mathbf{j} + (2 \cdot (-2) - 1 \cdot 0)\mathbf{k} \\ &= -\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 4\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Merkitään $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Tällöin

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = (-1) \cdot 0 + (-10) \cdot (-2) + (-4) \cdot 5 = 0.$$

Kolmas tapa ristitulon määrittämiseen on muodollisesti determinantin avulla. Jos käsitteet matriisi ja determinantti ovat vieraita, voit hypätä Huomautuksen 5.3.5 ja Esimerkin 5.3.6 yli. Nämä käsitellään kontaktiopetuksessa.

Huomautus 5.3.5. Ristitulo $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ saadaan myös determinantin

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

avulla kehittämällä ensimmäisen rivin suhteen. Tällöin

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

Esimerkki 5.3.6. Tarkastellaan vektoreita $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = -2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$. Laske $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ Huomautuksen 5.3.5 nojalla.

Lause 5.3.7. Olkoot $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{w}$ vektoreita avaruudessa $\mathbb{R}^3$ ja c skalaari. Tällöin on voimassa

- a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$,
- b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$,
- c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$,
- d) $c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (c\mathbf{v})$,
- e) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$,
- f) $\mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$,
- g) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$,
- h) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$,
- i) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

Todistus. Todistetaan malliksi b)-kohta. Merkitään

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \\ \mathbf{v} &= v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}, \\ \mathbf{w} &= w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Osoitetaan siis, että $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$. Saadaan

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \times ((v_1 + w_1)\mathbf{i} + (v_2 + w_2)\mathbf{j} + (v_3 + w_3)\mathbf{k}) \\
 &= (u_2(v_3 + w_3) - u_3(v_2 + w_2))\mathbf{i} \\
 &\quad + (u_3(v_1 + w_1) - u_1(v_3 + w_3))\mathbf{j} \\
 &\quad + (u_1(v_2 + w_2) - u_2(v_1 + w_1))\mathbf{k} \\
 &= (u_2v_3 + u_2w_3 - u_3v_2 - u_3w_2)\mathbf{i} \\
 &\quad + (u_3v_1 + u_3w_1 - u_1v_3 - u_1w_3)\mathbf{j} \\
 &\quad + (u_1v_2 + u_1w_2 - u_2v_1 - u_2w_1)\mathbf{k} \\
 &= (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_2w_3 - u_3w_2)\mathbf{i} \\
 &\quad + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_3w_1 - u_1w_3)\mathbf{j} \\
 &\quad + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k} + (u_1w_2 - u_2w_1)\mathbf{k} \\
 &= \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}.
 \end{aligned}$$

□

Esimerkki 5.3.8.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{i} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \\
 \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.
 \end{aligned}$$

Esimerkeissä 5.3.9, 5.3.10, 5.3.11, 5.3.12, 5.3.13 ja 5.3.14 tarkastellaan ristitulon käyttöä pinta-alojen ja tilavuuksien laskemisessa. Osa esimerkeistä käydään läpi kontaktiopetuksessa ja osa on laskuharjoitustehtävinä. Voit toki opiskella ne myös omatoimisesti.

Esimerkki 5.3.9. Perustele, että vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ virittämän suunnikkaan ala on

$$A_s = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\theta = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|,$$

missä θ on vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ välinen kulma.

Esimerkki 5.3.10. Tarkastellaan kolmiota ABC , missä $A = (1, 1, 0)$, $B = (3, 0, 2)$ ja $C = (0, -1, 1)$. Laske kolmion ala.

Esimerkki 5.3.11. Oletetaan, että suuntaissärmiön samasta kärjestä alkavina särminä on vektorit $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ja $\mathbf{c}$. Osoita, että suuntaissärmiön tilavuus V on skalaarikolmitulon $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ itseisarvo.

Esimerkki 5.3.12. Tetraedrin kärkinä ovat origo ja pisteet $A = (1, -1, 2)$, $B = (-2, 3, 0)$ ja $C = (3, -2, 1)$. Laske tetraedrin tilavuus.

Esimerkki 5.3.13. Oletetaan, että vektorit $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ ovat saman tason suuntaisia. Perustele, miksi $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ ja edelleen

$$\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Esimerkki 5.3.14. Tarkastellaan vektoreita $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ ja $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, missä $t \in \mathbb{R}$ on vakio. Etsitään se luku t , jolla vektorit ovat saman tason suuntaisia. Tiedetään, että vektorit ovat saman tason suuntaisia täsmälleen silloin, kun niiden virittämän suuntaissärmiön tilavuus on 0, eli saadaan yhtälö

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & t & 5 \end{vmatrix} = 28 + 7t = 0,$$

joka toteutuu täsmälleen silloin, kun $t = -4$.

5.4. Suorat ja tasot avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Tarkastellaan ensin suoraa avaruudessa $\mathbb{R}^3$ ja määrätään sen yhtälö. Tilannetta on havainnollistettu Kuvassa 21.

Olkoon L suora, joka kulkee pisteen $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ kautta ja on vektorin $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ suuntainen. Olkoon piste O origo. Piste $P = (x, y, z)$ kuuluu suoralle, jos ja vain jos on olemassa sellainen $t \in \mathbb{R}$, että

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\mathbf{v}.$$

Merkitään

$$\overrightarrow{OP_0} = \mathbf{r}_0, \quad \overrightarrow{OP} = \mathbf{r},$$

jolloin

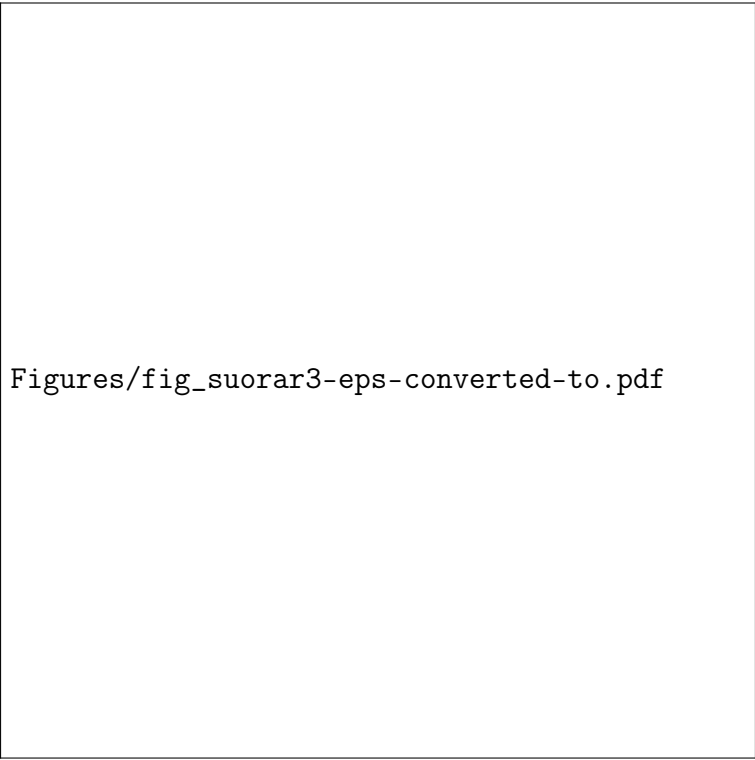
$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}, \\ \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Tällöin

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\mathbf{v} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}.$$

Pisteen P_0 kautta kulkevan vektorin $\mathbf{v}$ suuntaisen suoran parametriesitys vektorimuodossa on

$$(2) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$



Figures/fig_suorar3-eps-converted-to.pdf

KUVA 21. Suora L avaruudessa $\mathbb{R}^3$.

Siis kaikki ne pisteet (x, y, z) , jotka toteuttavat yhtälön (2) jollakin $t \in \mathbb{R}$, ovat suoran pisteitä. Toisin sanoen suora on avaruuden $\mathbb{R}^3$ pisteiden joukko, johon kuuluu ääretön määrä pisteitä.

Sijoittamalla yhtälöön $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_0 &= x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}, \\ \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \\ \mathbf{v} &= a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}\end{aligned}$$

saadaan

$$\begin{aligned}x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} &= x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k} + t(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}) \\ \iff x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} &= (x_0 + at)\mathbf{i} + (y_0 + bt)\mathbf{j} + (z_0 + ct)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Vektorit ovat samat, jos niiden komponentit ovat yhtäsuuret. Saadaan siis

$$(3) \quad \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

joka on suoran L parametriesitys koordinaattimuodossa.

Esimerkki 5.4.1. Määritetään pisteen $P_0 = (0, -1, 2)$ kautta kulkevan vektorin $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ suuntaisen suoran parametriesitys sekä vektorimuodossa että koordinaattimuodossa.

Merkitään

$$\mathbf{r}_0 = -\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Suoran parametriesitys vektorimuodossa on

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \\ &= -\mathbf{j} + 2\mathbf{k} + t(\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \\ &= t\mathbf{i} + (-1 + 3t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k},\end{aligned}$$

missä $t \in \mathbb{R}$. Edelleen suoran parametriesitys koordinaattimuodossa on

$$\begin{cases} x = 0 + 1 \cdot t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 + 0 \cdot t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

eli

$$(4) \quad \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Suora on esitetty Kuvassa 22.

Esimerkiksi piste $(0, -1, 2)$ on suoran piste, sillä sijoittamalla $x = 0$, $y = -1$ ja $z = 2$ sekä valitsemalla $t = 0$ yhtälöryhmässä (4), yhtälöryhmän kaikki yhtälöt toteutuvat. Sen sijaan esimerkiksi piste $(0, 0, 0)$ ei ole suoran piste, sillä olipa t mikä tahansa reaaliluku, niin yhtälöryhmän (4) viimeinen yhtälö ei toteudu, kun sijoitetaan $x = y = z = 0$.

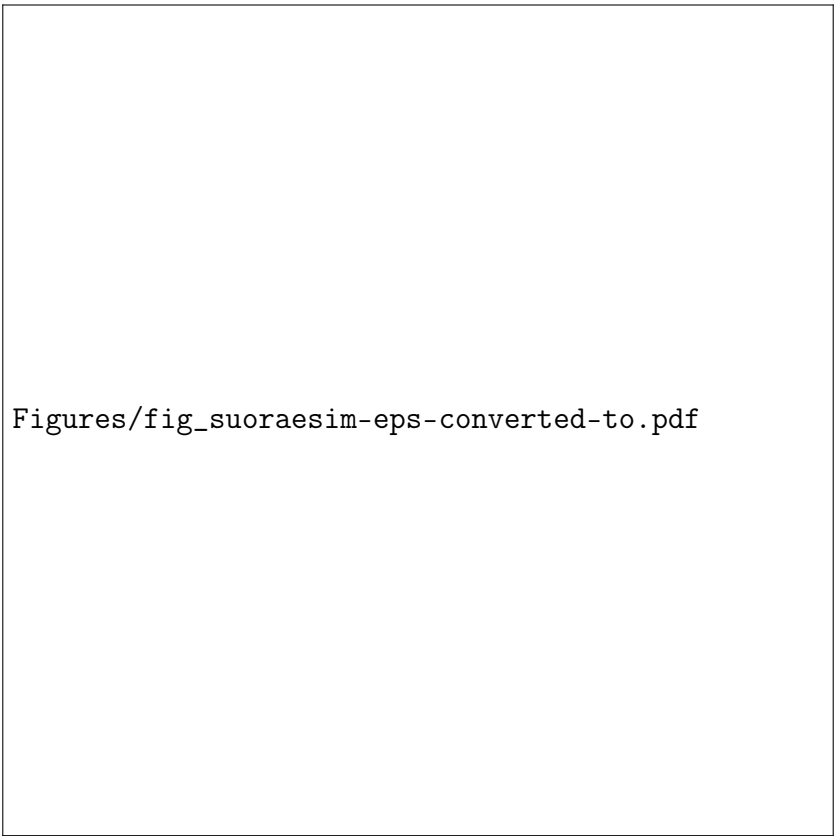
Jos suuntavektorin $\mathbf{v}$ komponentit eli suoran suuntaluvut $a \neq 0$, $b \neq 0$ ja $c \neq 0$, niin parametri t voidaan ratkaista koordinaattimuotoisista yhtälöistä (3). Saadaan

$$t = \frac{x - x_0}{a}, \quad t = \frac{y - y_0}{b}, \quad t = \frac{z - z_0}{c}.$$

Tällöin siis

$$(5) \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

joka on suoran L yhtälö normaalimuodossa. Siis kaikki pisteet (x, y, z) , joille yhtälöt (5) pätevät, ovat suoran pisteitä. Jos jokin suuntaluvuista on nolla, ei parametria t voida ratkaista. Kun esimerkiksi $a = 0$,



Figures/fig_suoraesim-eps-converted-to.pdf

KUVA 22. Suora $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + (-1 + 3t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ avaruudessa $\mathbb{R}^3$.

saadaan

$$x = x_0 \wedge \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Vastaavasti tarkastellaan tilanteita, joissa $b = 0$ tai $c = 0$.

Esimerkki 5.4.2. Määritetään pisteen $P_0 = (0, -1, 2)$ kautta kulkevan vektorin $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ suuntaisen suoran yhtälö normaalimuodossa. Ratkaistaan yhtälöistä (4) parametri t ja saadaan

$$t = x, \quad t = \frac{y + 1}{3}.$$

Viimeisessä yhtälössä ei esiinnyt parametria t , joten saadaan $z = 2$. Täten suoran yhtälö normaalimuodossa on

$$x = \frac{y + 1}{3} \wedge z = 2.$$

Esimerkki 5.4.3. Määritetään pisteiden $(1, -1, 2)$ ja $(2, -3, 4)$ kautta kulkevan suoran yhtälö. Merkitään $P_0 = (1, -1, 2)$ ja $P_1 = (2, -3, 4)$.

Koska suora kulkee pisteiden P_0 ja P_1 kautta, niin sen suuntavektori on $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0P_1} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Olkoon $\mathbf{r}_0$ pisteen P_0 paikkavektori. Tällöin $\mathbf{r}_0 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Edelleen suoran parametriesitys vektorimuodossa on

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \\ &= \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k} + t(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \\ &= (1+t)\mathbf{i} + (-1-2t)\mathbf{j} + (2+2t)\mathbf{k},\end{aligned}$$

missä $t \in \mathbb{R}$. Suoran parametriesitys koordinaattimuodossa on

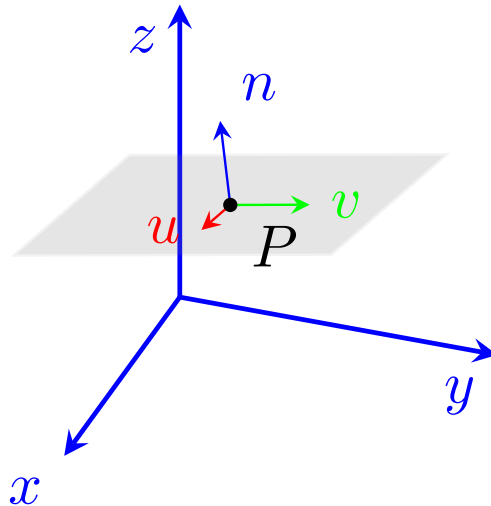
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Suoran yhtälö normaalimuodossa on

$$x - 1 = -\frac{y + 1}{2} = \frac{z - 2}{2}.$$

Tarkastellaan seuraavaksi tasoa avaruudessa $\mathbb{R}^3$ (Kuva 23). Taso tulee täysin määrätyksi avaruudessa $\mathbb{R}^3$, jos tiedetään yksi tason piste $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ja tason normaali $\mathbf{v} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$.

vektorit-r2-r3/kuva23.pdf



KUVA 23. Taso avaruudessa $\mathbb{R}^3$.

Piste $P = (x, y, z)$ sijaitsee tasossa, jos ja vain jos

$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$$

on kohtisuorassa vektoria $\mathbf{v}$ vastaan eli

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \overrightarrow{P_0P} &= 0 \\ \iff (\mathbf{A}\mathbf{i} + \mathbf{B}\mathbf{j} + \mathbf{C}\mathbf{k}) \cdot ((x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}) &= 0.\end{aligned}$$

Täten tason yhtälöksi normaalimuodossa saadaan

$$(6) \quad (x - x_0)A + (y - y_0)B + (z - z_0)C = 0.$$

Siis kaikki pisteet (x, y, z) , jotka toteuttava yhtälön (6), ovat tason pisteitä. Toisin sanoen taso on joukko avaruuden $\mathbb{R}^3$ pisteitä. Merkitsemällä $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ saadaan yhtälö yleisempään muotoon

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Kääntäen saadaan, että yhtälön $Ax + By + Cz + D = 0$ kuvaaja on aina taso, jos pätee $A \neq 0$, $B \neq 0$ tai $C \neq 0$. Tason normaalina on tällöin vektori $\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{i} + \mathbf{B}\mathbf{j} + \mathbf{C}\mathbf{k}$.

Esimerkki 5.4.4. Määritetään yhtälö tasolle, joka kulkee pisteiden $P_1 = (1, 1, 0)$, $P_2 = (0, 2, 1)$ ja $P_3 = (3, 2, -1)$ kautta. Muodostetaan kaksi vektoria, jotka ovat tason suuntaisia. Saadaan

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \overrightarrow{P_1P_2} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \\ \mathbf{u}_2 &= \overrightarrow{P_1P_3} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Tason normaali on kohtisuorassa vektoreita $\mathbf{u}_1$ ja $\mathbf{u}_2$ vastaan. Tätten normaali saadaan ristitulona

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Valitaan tason yhtälöä varten piste P_1 . Tason yhtälöksi saadaan

$$\begin{aligned}(x - 1)(-2) + (y - 1)(1) + (z - 0)(-3) &= 0 \\ \iff -2x + 2 + y - 1 - 3z &= 0 \\ \iff 2x - y + 3z - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Esimerkki 5.4.5. Osoitetaan, että tasot $x - y = 3$ ja $x + y + z = 0$ leikkaavat ja etsitään vektori $\mathbf{u}$, joka on yhdensuuntainen leikkaussuoran kanssa. Tasot leikkaavat, jos niillä on yhteisiä pisteitä tai niiden normaalit eivät ole yhdensuuntaisia. Voidaan ensin pohtia, onko yhteiset pisteet helppo määrittää. Tässä tilanteessa esimerkiksi piste $(4, 1, -5)$ toteuttaa molempien tasojen yhtälöt ja on täten molempien tasojen piste. Näin ollen tasot leikkaavat.

Toisaalta voidaan tarkastella myös sitä, ovatko tasojen $x - y - 3 = 0$ ja $x + y + z = 0$ normaalit yhdensuuntaiset. Normaalit ovat

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \mathbf{i} - \mathbf{j}, \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Tutkitaan, onko olemassa sellaista lukua $t \in \mathbb{R}$, että $t\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ eli $t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$. Toisin sanoen tutkitaan, onko yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \\ t = 0 \end{cases}$$

ratkaisua. Havaitaan heti, että ei ole olemassa sellaista lukua $t \in \mathbb{R}$, että $t\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$. Siis normaalit $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$ eivät ole yhdensuuntaiset, joten tasot eivät ole yhdensuuntaiset eli ne leikkaavat.

Tasojen leikkaussuora on kohtisuorassa normaaleja vastaan. Näin ollen leikkaussuora on yhdensuuntainen vektorin

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}\end{aligned}$$

kanssa.

Määritetään seuraavaksi tason yhtälö, joka kulkee kahden muun tason leikkaussuoran kautta. Tarkastellaan kahta tasoa

$$\begin{aligned}T_1 &: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ T_2 &: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,\end{aligned}$$

jotka eivät ole yhdensuuntaisia eli ne leikkaavat. Etsitään siis tasojen T_1 ja T_2 leikkaussuoran kautta kulkevan tason yhtälö. Tilannetta on havainnollistettu Kuvassa 24.

Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}$ vakio. Muodostetaan yhtälö

$$(7) \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$



Figures/leikkaavattasot3-eps-converted-to.pdf

KUVA 24. Tasot $x + y - 2z = 6$ ja $2x - y + z = 2$ sekä niiden leikkaussuoran kautta kulkeva taso.

josta saadaan

$$(8) \quad (A_1 + \lambda A_2)x + (B_1 + \lambda B_2)y + (C_1 + \lambda C_2)z + (D_1 + \lambda D_2) = 0$$

ja havaitaan, että muodostettu yhtälö on jonkun tason yhtälö. Jos (x, y, z) on tasojen T_1 ja T_2 leikkaussuoran piste, niin piste toteuttaa tasojen T_1 ja T_2 yhtälöt. Täten piste (x, y, z) toteuttaa myös yhtälön (7) ja edelleen yhtälön (8). Siis olipa λ mikä tahansa jokainen tasojen T_1 ja T_2 leikkaussuoran piste on tason (8) piste. Siis yhtälö (7) on yhtälö sellaiselle tasolle, joka kulkee tasojen T_1 ja T_2 leikkaussuoran kautta. Kääntäen saadaan, että jokainen tasojen T_1 ja T_2 leikkaussuoran kautta kulkevan tason yhtälö $A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$ voidaan esittää muodossa (8) sopivalla arvolla λ . Huomaa, että olipa $\lambda \in \mathbb{R}$ mikä tahansa, niin yhtälö (7) ei esitä tasoa T_2 .

Esimerkki 5.4.6. Tarkastellaan tasoja $x + y - 2z = 6$ ja $2x - y + z = 2$. Etsitään sellainen taso, joka kulkee tasojen leikkaussuoran ja pisteen $(-2, 0, 1)$ kautta (katso Kuva 24). Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}$ vakio. Muodostetaan tunnettujen tasojen leikkaussuoran kautta kulkevan mielivaltaisen

tason yhtälö. Yhtälöksi saadaan

$$(9) \quad x + y - 2z - 6 + \lambda(2x - y + z - 2) = 0$$

missä $\lambda \in \mathbb{R}$. Muodostetaan yhtälö sille tasolle, joka kulkee pisteen $(-2, 0, 1)$ kautta. Tehtävänä on etsiä se λ , jolla piste $(-2, 0, 1)$ toteuttaa yhtälön (9). Siis sijoitetaan yhtälössä (9) $x = -2$, $y = 0$ ja $z = 1$. Saadaan

$$-2 + 0 - 2 \cdot 1 - 6 + \lambda(2 \cdot (-2) - 0 + 1 - 2) = 0 \iff \lambda = -2.$$

Kysytty tason yhtälö on siis

$$\begin{aligned} x + y - 2z - 6 + (-2)(2x - y + z - 2) &= 0 \\ \iff 3x - 3y + 4z + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Tarkastellaan seuraavaksi avaruuden $\mathbb{R}^3$ pisteen $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ etäisyyttä suorasta ja tasosta. Etäisyydellä tarkoitetaan pisteen P_0 ja sen suoran tai tason pisteen, joka on lähimpänä pistettä P_0 , välistä etäisyyttä. Toisin sanoen etsitään pisteen P_0 ja suoran tai tason välistä minimietäisyyttä. Vastaavasti voidaan määritellä myös suorien välinen etäisyys, tasojen välinen etäisyys sekä suoran etäisyys tasosta.

Lauseet 5.4.7 ja 5.4.9 osoitetaan kontaktiopetuksessa. Samalla kerrotaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ suoriin ja tasoihin liittyviä perusasioita.

Lause 5.4.7. *Olkoon $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ piste ja L suora, joka kulkee pisteen P_1 kautta ja on vektorin $\mathbf{v}$ suuntainen. Tällöin pisteen P_0 etäisyys d suorasta L on*

$$d = \frac{|(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|},$$

missä $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ ja $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$.

Todistus. Luennot. □

Esimerkki 5.4.8. Lasketaan pisteen $(2, 0, -3)$ etäisyys suorasta $\mathbf{r} = \mathbf{i} + (1 + 3t)\mathbf{j} - (3 - 4t)\mathbf{k}$. Suoran parametriesitys koordinaattimuodossa on

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 3t \\ z = -3 + 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Havaitaan, että suora kulkee pisteen $P_1 = (1, 1, -3)$ kautta ja on vektorin $\mathbf{v} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ suuntainen. Pisteitä P_0 ja P_1 vastaavat paikkavektorit ovat

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= 2\mathbf{i} - 3\mathbf{k}, \\ \mathbf{r}_1 &= \mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Pisteen $(2, 0, -3)$ etäisyys suorasta on

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{|(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} \\
 &= \frac{|(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \times (3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \\
 &= \frac{-4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{\sqrt{25}} \\
 &= \frac{\sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + 3^2}}{5} \\
 &= \frac{\sqrt{41}}{5}.
 \end{aligned}$$

Lause 5.4.9. Jos $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ piste ja tasolla on $Ax + By + Cz + D = 0$, niin pisteen P_0 etäisyys d tasosta on

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Todistus. Luennot. □

Esimerkki 5.4.10. Lasketaan pisteen $(2, -1, 3)$ etäisyys tasosta $2x - 2y - z - 9 = 0$. Lauseen 5.4.9 nojalla

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{2 \cdot 2 + (-2)(-1) + (-1) \cdot 3 + (-9)}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} \\
 &= \frac{|-6|}{\sqrt{9}} \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$