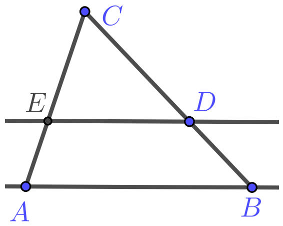
Euklidinen geometria
Harjoitus 7/2018 sekä **kertaustehtävät / mallikoetehtävät**

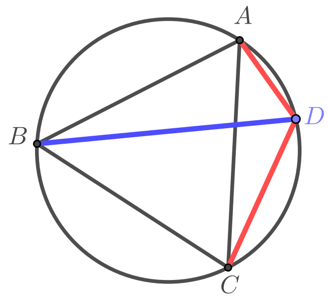
Demoryhmät: ma 22.10. klo 12-14 salissa M105; ke 24.10. klo 10-12 salissa M102
(tiistaina 23.10. ei ole ohjelmaa ja kurssin pitäjä ei ole Joensuussa)

1. Kuvassa 1(a) on kolmio $\triangle ABC$, jonka sivuja leikkaa suora DE. Osoita, että jos $CE/EA = CD/DB$, niin $DE \parallel AB$.

Eräs tapa. Tee antiteesi, että on olemassa leikkauspiste $F = \overleftrightarrow{DE} \cap \overleftrightarrow{AB}$ ja käytä Menelaoksen lausetta.



(a) Kolmiota leikkaava suora.



(b) Van Schootenin lause kertoo, että $AD + CD = BD$.

Kuva 1: Menelaoksen ja Ptolemaioksen lauseiden sovelluksia.

2. Kuvassa 1(b) on ympyrän sisälle piirretty tasasivuinen kolmio $\triangle ABC$. Ptolemaioksen lausetta käyttäen todista van Schootenin kaava $AD + CD = BD$.

3. (a) Kolmion $\triangle ABC$ sivujen pituudet ovat 5, 6 ja 7. Laske kolmion $\triangle ABC$ pinta-ala Heronin kaavan avulla.

(b) Tetraedri on säännöllinen monitahokas, jonka ulkopinta koostuu neljästä keskenään yhtenevästä tasasivuisesta kolmiosta. Olkoon tetraedrin särmän pituus 1. Laske tetraedrin ulkopinnan pinta-ala.
(Käytä tällä kertaa Heronin kaavaa.)

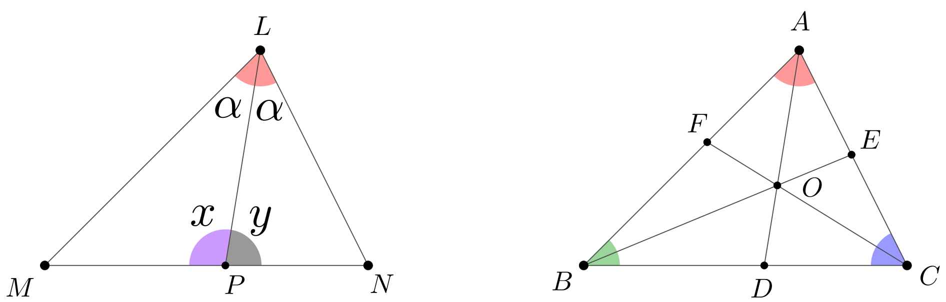
4. (a) Osoita, että $\sin(180° - \beta) = \sin(\beta)$ käyttämällä kaavaa

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

(b) Siis Kuvassa 2 pätee $\sin(x) = \sin(y)$. Sovella sinilausetta kahdesti ja päättele, että

$$\frac{MP}{PN} = \frac{ML}{LN}.$$

(c) Edelleen, kohtaa (b) ja käänteistä Cevan lausetta käyttämällä päättele, että kulmanpuolittajat AD, BE ja CF leikkaavat samassa pisteessä.



Kuva 2: Eukleideen Alkeiden Lause 6.3. ja kulmanpuolittajien leikkauspiste.

Kertaustehtäviä / mallikoetehtäviä

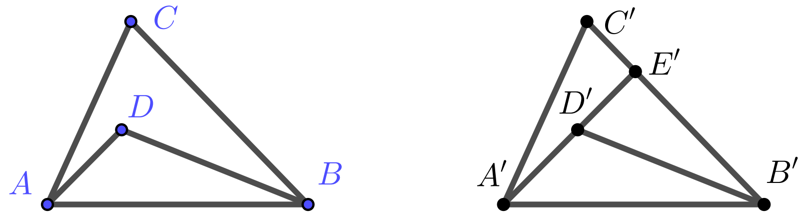
K1. Ilmaise sanallisesti tai esimerkkikuvaa käyttämällä: Mitä tarkoittavat kurssilla esitellyt tulokset:

(a) kolmioepäyhtälö? (1p)
(b) ulkokulmaepäyhtälö? (1p)

Kuvassa 3 on kolmio $\triangle ABC$, jonka sisällä on piste D. Osoita, että

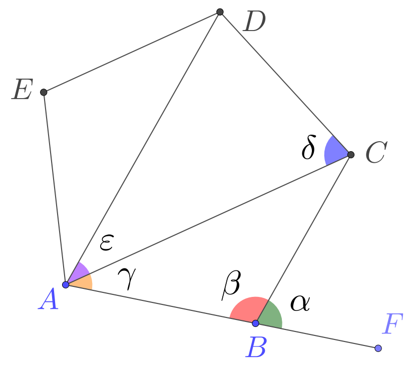
(c) $AC + CB > AD + DB$ (2p)
(d) $\angle ACB < \angle ADB$ (2p)

Saat käyttää todistuksessa mitä tahansa tuntemiasi menetelmiä. Halutessasi voit käyttää oheista apukuvaa.



Kuva 3: Eukleideen Alkeiden Lause 1.21

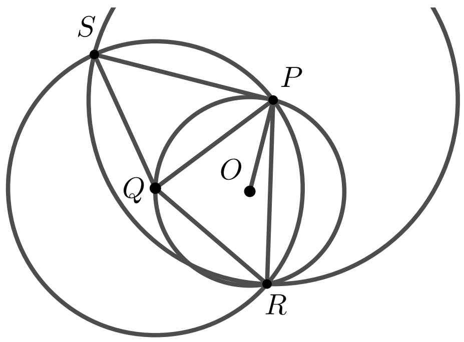
K2. Kuvassa 4 kuvio $ABCDE$ on säännöllinen viisikulmio ja pätee $5\alpha = 360°$. Laske kulmien $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ suuruudet. (6p)



Kuva 4: Säännöllisen viisikulmion kulmien suuruudet.

K3. Kuvassa 5 on suoria viivoja sekä ympyrät $C(O, OP)$, $C(Q, QP)$ ja $C(P, PS)$, joista viimeinen ei ole ihan kokonaan kuvassa.

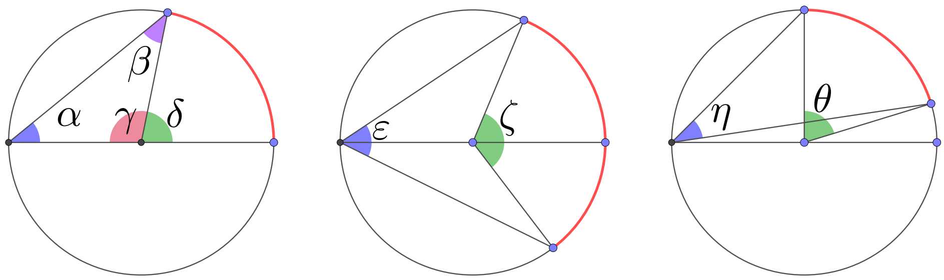
(a) Mitä tarkoittaa kurssilla esitetty SSS-yhtenevyyslause? (2p)
(b) Osoita, että kolmiot $\triangle SQP$ ja $\triangle PQR$ ovat yhtenevät (2p)
(c) Osoita, että janat OP ja PS ovat kohtisuorassa (2p)



Kuva 5: Kolmioita ja ympyröitä.

K4. Todista Kuvaa 6 koskevat väitteet

(a) $\alpha = \beta$ ja $2\alpha = \delta$; (2p)
(b) $2\varepsilon = \zeta$; (2p)
(c) $2\eta = \theta$. (2p)



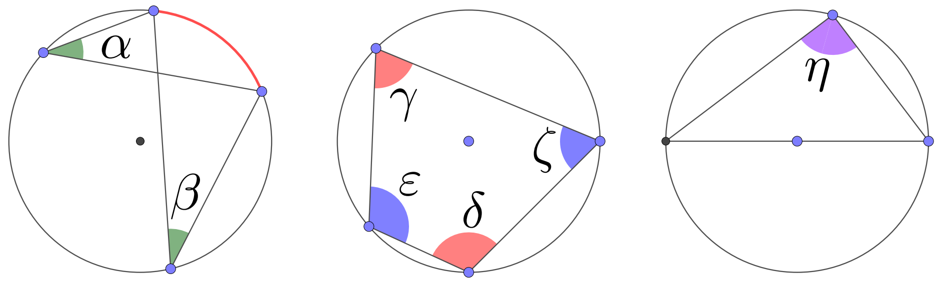
Kuva 6: Kehäkulmalauseen todistus.

K5. Todista kehäkulmalauseen seuraukset, jotka liittyvät Kuvaan 7:

(a) "Samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuret", eli $\alpha = \beta$. (2p)

(b) "Jännenelikulmion vastakkaisten kulmien summa on $180°$", eli $\gamma + \delta = \varepsilon + \zeta = 180°$. (2p)

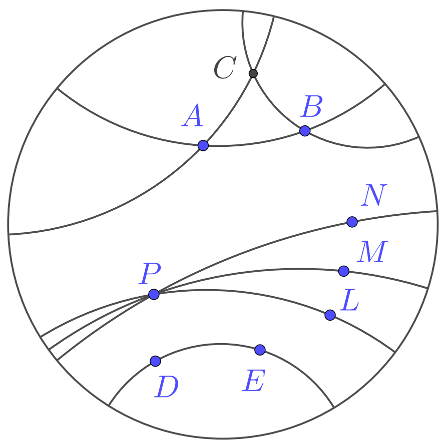
(c) "Puoliympyrän kehäkulma on suora", eli $\eta = 90°$. (2p)



Kuva 7: Kehäkulmalauseen seurauksia.

K6. (a) Mitä tarkoitetaan Eukleideen paralleeliaksioomalla? (2p)

(b) Millä tavoin hyperbolinen geometria eroaa Euklidisesta geometriasta? Voit halutessasi käyttää apuna Kuvaa 8. (2p)



Kuva 8: Poincarén hyperbolisen geometrian malli.

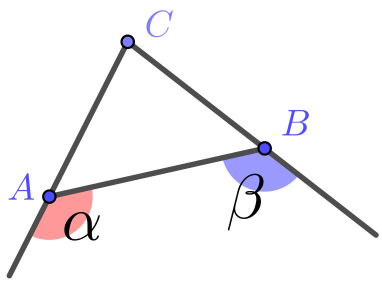
(c) Esitä kaksi väitettä, jotka pätevät pallogeometriassa, mutta eivät Euklidisessa tai hyperbolisessa geometriassa. (2p)

K7. (a) Mitä tarkoittaa kurssilla esitetty SKS-yhtenevyyslause? (2p)

(b) Mitä vikaa on seuraavassa väitteessä? (2p)

Jos kolmioille $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ pätee $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $AB = A'B'$ ja $AC = A'C'$, niin kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ ovat yhtenevät.

(c) Kuvassa 9 on kolmio $\triangle ABC$, jolle $AC = BC$. Osoita, että $\alpha = \beta$. Saat käyttää todistuksessa mitä tahansa tuntemiasi menetelmiä. (2p)



Kuva 9: Kolmio.

K8. Tee jokin kurssilla esitelty origami tai paperintaittelukonstruktio. Tyyli on vapaa. Neliön muotoisia ja A4-paperiarkkeja on saatavilla. (6p)

Eräitä kurssilla esiteltyjä kaavoja ja tuloksia.

1. Pythagoraan lause: $A_1 = A_2 + A_3$.
2. Ptolemaioksen lause: $ac + bd = ef$.
3. Heronin kaava: $A_1 = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, missä $p = (a+b+c)/2$.
4. Cevan lause: $\dfrac{AF}{FB} \times \dfrac{BD}{DC} \times \dfrac{CE}{EA} = 1$.
5. Menelaoksen lause: $\dfrac{AF}{FB} \times \dfrac{BD}{DC} \times \dfrac{CE}{EA} = 1$
6. Eulerin identiteetti: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$
7. Yhtenevyyslauseet: SKS, SSS, KSK, KKS