NEWTON

$\sqrt{a} = ?$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

& $f(x) = x^2 - a$

$f'(x) = 2x$

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

$x_n \to \sqrt{a}$

$\dfrac{a = 2}{\sqrt{2} = ?}$

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

$x_0 = 1$

$x_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2} = 1,5$

1 OIK.

$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{2}{3}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{9}{6} + \frac{8}{6}\right) = \frac{17}{12} \approx 1,\underbrace{41}66\ldots$

2 OIK

$x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + 2 \cdot \frac{12}{17}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{17^2 + 24 \cdot 12}{12 \cdot 17}\right) = \frac{577}{408} \approx 1,\underbrace{41421}568$

$\Rightarrow$ VIRHE "$\varepsilon_{n+1} \approx (\varepsilon_n)^2$"

$\sqrt{2} = 1,\underbrace{41421}356\ldots$

5 OIK. DESIM.

4) KETJUMURTOLUVUT

ESIMERKKI: $\frac{225}{157}$

EUKLEIDEEN ALGORITMILLA

$$\begin{aligned}
225 &= 1 \cdot 157 + 68 \\
157 &= 2 \cdot 68 + 21 \\
68 &= 3 \cdot 21 + 5 \\
21 &= 4 \cdot 5 + 1 \\
5 &= 5 \cdot 1
\end{aligned}$$

SIIS
$$\frac{225}{157} = 1 + \frac{68}{157} = 1 + \frac{1}{\frac{157}{68}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{21}{68}}$$
$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{68}{21}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{5}{21}}}$$

$$\Rightarrow \frac{225}{157} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}}$$

RATIONAALILUKU

PÄÄTTYVÄ KETJUMURTOLUKU

VASTAAVASTI $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\Rightarrow x$ VOIDAAN ESITTÄÄ PÄÄTTYMÄTTÖMÄNÄ KETJUMURTOLUKUNA.

JOSKUS, JOS ON HYVÄ TUURI, ANNETUN KETJUMURTOLUVUN TARKKA ARVO VOIDAAN LASKEA. (ESIM. KEKSITÄÄN SOPIVA YHTÄLÖ)

ESIM.

$$x = 1 + \cfrac{1}{\underbrace{2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}}_{x-1}}$$

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}} = x - 1$$

AHAA!

$$\Rightarrow \quad x = 1 + \frac{1}{2 + x - 1}$$

$$\Rightarrow \quad x = 1 + \frac{1}{x+1} \quad \Big\| \cdot (x+1)$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + \cancel{x} = \cancel{x} + 1 + 1$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2} \quad \xRightarrow{x>0} \quad \underline{\underline{x = \sqrt{2}}}$$

SIIS ESIM.

$$\sqrt{2} \approx 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+0}}}$$

$$2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$2 + \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$$

$$= 1 + \frac{5}{12} = \frac{17}{12} \approx 1.4166\ldots$$

HUOMATAAN, ETTÄ KATKAISUVAIHEESSA

$$\ddots \frac{1}{2+\underbrace{\frac{1}{2+\frac{1}{2+\dots}}}_{\in\left(0,\frac{1}{2}\right)}} \qquad \ddots \frac{1}{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{MITÄ ISOMPI LUKU}}}{100}+\underbrace{\frac{1}{2+\underbrace{\frac{1}{2+\dots}}_{\in\left(0,\frac{1}{2}\right)}}}_{\text{SITÄ PIENEMPI VIRHE, JOS KATKAISTAAN TÄSTÄ}}}$$

TÄMÄN VUOKSI H5T2 LUKU

$$x = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}$$

ON VÄLIN $(0,1)$ IRRATIONAALILUVUISTA VAIKEIN APPROKSIMOIDA RATIONAALILUVUILLA.

LISÄKSI, JOS $x \approx \frac{p \in \mathbb{N}}{q \in \mathbb{N}}$, NIIN EUKLEIDEEN ALGORITMI LUVUILLE p JA q "KESTÄÄ PITKÄÄN".

ESIM: ~~ESIM~~ FIBONACCIN LUVUT MÄÄRITELLÄÄN

$$F_0 = 1$$

$$F_1 = 1$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$ ← REKURSIOKAAVA

$$\Rightarrow F_{n+1} - F_n - F_{n-1} = 0 \quad (*)$$

← HOMOGEENINEN

← "EI $F_n (F_{n+1})^2$"

$\Rightarrow$ LINEAARINEN

- $2x + y + 3z = 0$ LIN
- $x^2 + 2y^2 + 2yx = 3$

↑ EPÄLINEAARINEN

RATKAISTAAN REKURSIOYHTÄLÖ YRITTEELLÄ

$$F_n = a^n, \quad n \in N, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_n = a^n \\ F_{n-1} = a^{n-1} \\ F_{n+1} = a^{n+1} \end{cases}$$

$$(*) \Rightarrow a^{n+1} - a^n - a^{n-1} = 0 \quad \| : a^{n-1}$$

$$\Rightarrow a^2 - a - 1 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

SIIS YLEINEN RATKAISU ON

$$F_n = A \underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}_{=\varphi}^n + B \underbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}^n = -1/\varphi$$

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}(a+b)(a-b) \\ = a^2 - b^2\end{array}} \quad = \frac{2-2\sqrt{5}}{\underbrace{1-5}_{-4}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

ALKUEHDOISTA SEURAA

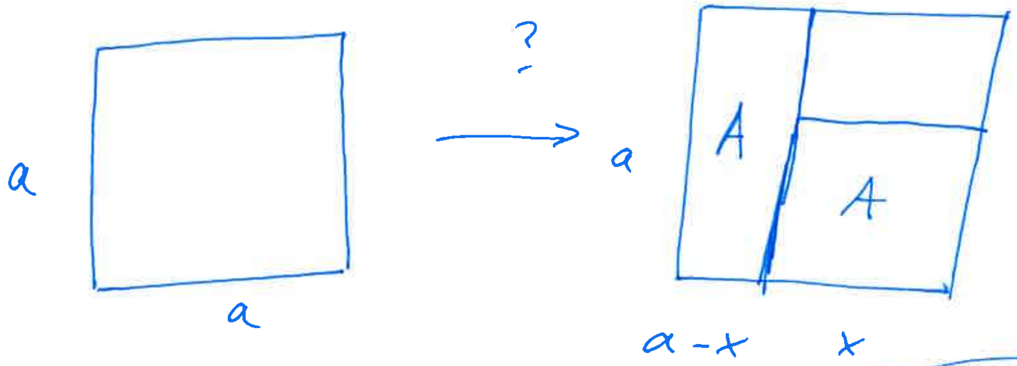
$$\begin{cases} F_0 = A + B = 1 \\ F_1 = A\varphi - B/\varphi = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ B = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n$$

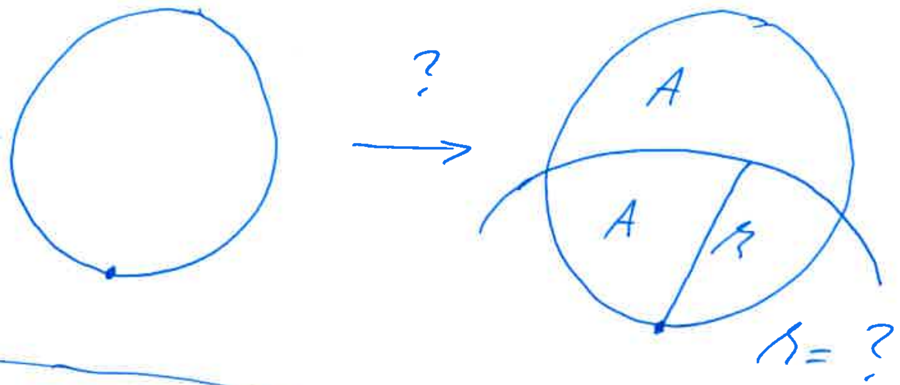
T. 2,11 (KULTAINEN LEIKKAUS)

TAI TOISIN SANOIN

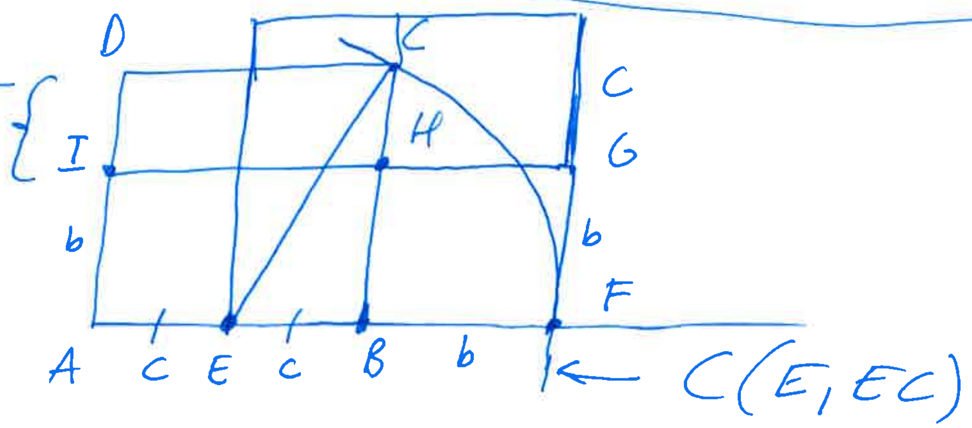
$$x^2 = a(a-x)$$



VERTAA :



Ratk.



VÄITE: ETSITTY PITUUS x ON BF PITUUS.