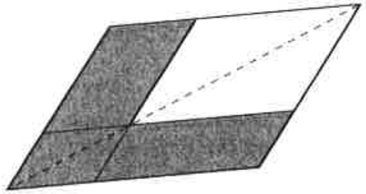
tuus nykymielessäkään ole luku, vaikka näillä käsitteillä onkin yhteys. Lähtökohtaisesti pitäisi tyytyä vertailemaan janoja tai aloja ja sanoa, että jos suorakulmion sivut a ja b ovat jonkin saman janan kokonaisia moninkertoja, siis $a = n \times c$ ja $b = m \times c$, niin suorakulmio on yhtä suuri kuin nm kpl. c-sivuisia neliöitä yhteensä. Janan c voi kyllä tilapäisesti nimetä "mittayksiköksi" pituudelle, jolloin on aika luonnollista nimetä c-sivuinen neliö pinta-alan mittayksiköksi. Jos halutaan, että mittaluvut ovat kokonaislukuja, on tarvittaessa vaihdettava pienempään mittayksikköön sikäli kun ollenkaan on olemassa sellainen mittayksikkö, että janat a ja b ovat pituudeltaan sen kokonaislukumoninkertoja. Jos on, niin janoja a ja b sanotaan yhteismitallisiksi, kuten jo mainittiin ensimmäisessä kirjassa. Tämä tarkoittaa, että niiden pituuksien suhde on rationaaliluku. Euklidisen geometrian tärkeä piirre on *mittakaavainvarianssi* — samanlaiset kuviot voi piirtää minkä kokoisina tahansa. (Epäeuklidisessa geometriassa tai vaikka pallon pinnalle piirrettäessä on toisin, esimerkiksi kolmion kulmien summa riippuu kolmion koosta.) Siksi euklidisessa geometriassa esiintyy yhdenmuotoisia kuvioita. Eukleideen viidennessä ja kuudennessa kirjassa tutkimuksen kohteena ovatkin viime kädessä pituuksien, kulmien ja alojen *suhteet*. Monikerrat ovat sellaisia suhteita, jotka yllä esitetyssä mielessä vastaavat luonnollisia lukuja. Yhteismitalliset suhteet vastaavat rationaalilukuja. Yhteismitatonta, siis irrationaalista suhdetta joudutaan arvioimaan yhteismitallisilla eli rationaalisilla suhteilla. Koko ongelman huomaaminen on kouluttamattomalle ihmiselle, etenkin lapselle ylivoimaisen vaikeaa ja palaamme siihen vielä useaan kertaan. *Suhdeoppi* oli muinaisen Kreikan matematiikan ja koko antiikin tieteen suursaavutus, vastaahan klassisella tavalla määritelty irrationaalinen suhde oleellisesti reaalilukua esimerkiksi *Dedekindin leikkauksen* mielessä. Onkin tapana leikillisesti kinastella siitä, tunsivatko kreikkalaiset modernin reaalilukukäsitteen.

Eukleides ei siis toisen kirjan alussa missään mielessä pyri antamaan laskusääntöä suorakulmion pinta-alaluvun laskemiseksi. Ei ole tarkoitus ajatella lukuja, vaan käsitellä geometrisia objekteja itseään. Tässä yhteydessä *kahden janan tulo* kerta kaikkiaan on niiden virittämä suorakulmio tai sen kanssa yhtä suuri kuvio.

(2) *Mutkio* on jäännös suunnikkaasta, kun toisesta päästä poistetaan kuvan mukaisesti pienempi suunnikas, jonka vapaa kärki on lävistäjällä.



"Mutkio" ja kohdassa 1.43 määritelty "täyte" ovat hauskoja sanoja, joiden ei soisi katoavan lopullisesti suomenkielestä. Mutkio, kreikaksi *gnomon*, on Eukleideella ja koko antiikin ajan matematiikassa hyvin tärkeä kuvio. Syy käy ilmi tuotapikaa.

2.2. Lauseet ja tehtävät. Nykymatematiikan kielellä ilmaistuna Alkeiden toinen kirja käsittelee algebrallista järjestelmää, jossa on kahdenlaisia objekteja ja kaksi laskutoimitusta, yhteen- ja kertolasku. Ensimmäisen objektiluokan muodostavat janat, tai oikeammin janojen ekvivalenssiluokat, jossa on samaistettu yhtä pitkät (ts. yhtenevät) janat. Toisen luokan objektit ovat tasokuviot, joista yhtä suuret samaistetaan. Tässä "tasokuvioiksi" voisi ehkä tyytyä hyväksymään pelkästään suorakulmiot, mutta kaikki monikulmiot kelpaavat edustamaan tasokuvion kokoa, siis pinta-alaa, koska lause 1.45 osoittaa, että monikulmion voi aina korvata yhtä suurella suorakulmiolla.

Summa $a + b$ on määritelty, kun a ja b ovat molemmat joko janoja tai tasokuvioita. Janojen summa muodostetaan valitsemalla toiselle samanpituinen edustaja, joka on toisen jatkona ja yhdistämällä janat, toisin sanoen liittämällä janat peräkkäin. Tasokuviot summataan valitsemalla kummankin edustajaksi yhtä leveä suorakulmio siten, että ne ovat vierekkäin ja muodostavat yhdessä uuden suorakulmion. *Kahden janan tulo* on niiden virittämä suorakulmio — oikeastaan sen edustama luokka eli pinta-ala. Janan ja tasokuvion tuloa ei ole määritelty tasogeometriassa kuten ei myöskään kahden tasokuvion tuloa. Monikerrat eli luonnollisella luvulla kertomiset määritellään tietenkin yhteenlaskun avulla ($2a = a + a$ jne.). Vähennyslasku määritellään summan avulla niissä tapauksissa, joissa erotus on olemassa. Muuten erotusta ei määritellä ollenkaan, sillä negatiivisia janoja ei ole. Suorakulmion jakaminen janalla oli tehtävä 1.44.

Alkeiden toisessa kirjassa johdetaan geometriasta kymmenenä ensimmäisenä lauseena **näille laskutoimituksille** seuraavat laskulait:

(1) $(a_1 + \cdots + a_n)b = a_1b + \cdots + a_nb$.
(2) $(a+b)a + (a+b)b = (a+b)^2$
(3) $a(a+b) = a^2 + ab$.
(4) $(a+b)^2 = 2ab + a^2 + b^2$.
(5) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.
(6) $(a-b)(a+b) + b^2 = a^2$.
(7) $(a+b)^2 = 2ab + a^2 + b^2$ ja $2ab - (a-b)^2 = a^2 + b^2$
(8) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$
(9) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2) = 2a^2 + 2b^2$.
(10) $(a+b)^2 + (b-a)^2 = 2(a^2+b^2) = 2a^2 + 2b^2$.

Jokaisen todistuksen yhteyteen on kirjoitettu lista käytetyistä apulauseista. Listoista näkee heti, että Alkeissa esitetään kaavoille (1)–(10) toisistaan täysin riippumattomat todistukset, jotka siis käyttävät kukin erikseen vain ensimmäisen kirjan tietoja. Vain yksi vähäpätöinen poikkeus "vahvistaa säännön". Lisäksi Eukleides käyttää vain osaa kaavoista jälkeenpäin ja joitakin on jo todistettu ensimmäisessä kirjassa. Toisen kirjan tarkoituksena ei varmaan olekaan rakentaa kudosta käyttökelpoisista teoreemoista, vaan esitellä metodi, jolla geometriasta saadaan tarvittaessa tällaisia tietoja. Samalla esitellään geometrisen algebran kaavojen visuaalinen merkitys. Esimerkkejä on näinkin monta siitä syystä, että merkin puolesta toisistaan eroaville kaavoille tulee eri tulkinta, sillä negatiivisilla suureilla ei ole geometrisia vastineita. Eukleidella ei siis ollut käytössä negatiivisia lukuja eikä tietenkään algebrallista merkintätapaamme. Algebrallinen ajattelu kehittyi tästä huolimatta jo antiikin aikana, ja Alkeiden toisen kirjan lauseille laadittiin jälkeenpäin todistuksia, joissa kaavat (2)-(10) johdettiin kaavasta (1). Tämähän on nykyisin helppoa algebrallisin manipulaatioin, siis "laskemalla kirjaimin". Tämän Aschankin toteaa ja tekee muistutuksissaan. Lähtökohdaksi kaavojen algebralliselle johtamiselle tarvittaisiin (1):n lisäksi joitakin "itsestäänselviä" peruskaavoja, kuten ainakin laskutoimitusten *vaihdannaisuus* $a+b = b+a$ ja $ab = ba$ ja *liitännäisyys* $(a+b)+c = a+(b+c)$ ja $(ab)c = a(bc)$ ennen kuin voidaan esimerkiksi (3) todistaa laskemalla siis vaikkapa näin:

$(a+b)a + (a+b)b = (aa+ba) + (ab+bb) = aa + (ba+ab) + bb = (aa+ba) + (ab+bb) = (a+b)a + (a+b)b = (a+b)(a+b) = (a+b)^2$.

Esitin yllä abstraktin tulkinnan geometrian laskutoimituksille. Reaalilukuihin tottuneelle ihmiselle voi kuitenkin olla paljon luonnollisempaa tulkita geometrisen algebran laskutoimitukset sillä tavalla, että sittenkin otetaan käyttöön geometrian lisäksi reaaliluvut ja ilmaistaan niiden avulla pituudet ja pinta-alat sekä myös kulmat. Tällainen moderni menettely on tosin yllättävän työläs, mutta se on toteutettu täsmällisesti useassa nykyaikaisessa geometrian järjestelmissä, esimerkiksi vanhimmassa niistä, *Hilbertin aksiomaattisessa geometriassa.*

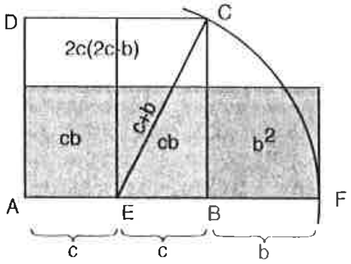
Koska tarkoituksenamme on esitellä Eukleideen Alkeita suomennoksineen, esitämme seuraavassa lauseisiin (1)–(10) liittyvien kuvioiden lisäksi lauseiden alkuperäiset geometriset todistukset, ensimmäiset tarkasti, muista pääkohdat.

Toisen kirjan aluksi Eukleides esittää ja johtaa geometrisesti perustavalaatuisen osittelulain $(a_1 + \cdots + a_n)b = a_1b + \cdots + a_nb$. Eukleideen järjestelmässä kaava merkitsee, että janojen yhteenlaskun ja alojen yhteenlaskun välillä vallitsee tämä yhteys, vaikka ne ovat eri laskutoimituksia! Todistus ei millään tavalla käytä sitä tietoa, että lukujen laskutoimituksilla on samantapainen osittelulaki. Oletuksena on vain, että alan yhteenlasku tehdään luonnollisella tavalla, siis yhdistämällä paloja — aivan kuten janojen ja kulmien yhteenlaskukin. Muistetaan samalla, että aksiooman 8 mukaan yhtenevät kuviot ovat yhtä suuret. Kaikki tämä toimii ilman minkään lukuarvon liittämistä suorakulmioon. Mutta Aschan korostaa monen edeltäjänsä tavoin yhteyttä vähintäänkin luonnollisiin lukuihin kirjoittaessaan muistutuksen: "Jos suorakulmioin pinta-alasta *lasketaan luku*, niin se kohta nähdään, että suorakulmio EO = suorakulmiot $EP + IR + KO$. Olkoon $EI = 7$ kyynärää, $IK = 2$ kyynärää, $KH = 4$ kyynärää, siis koko $EH = 13$ kyynärää, ja olkoon $A = EN = 6$ kyynärää; niin $13 \times 6 = 7 \times 6 + 2 \times 6 + 4 \times 6$, se on 78 kyynäräneliöä = 42 + 12 + 24 kyynäräneliöä. Jos viivain lukumäärät merkitään samassa järjestyksessä $EI = a$, $IK = e$, $KH = h$; siis $EH = a+e+h$, ja $A = k$, niin on $(a+e+h) \times k = a \times k + e \times k + h \times k$. *Tästä nähdään, että tulot kahdesta luvusta, kerrottu toinen toisella, owat yhtä suuret, josko luwut kerrotaan kokonaisina, eli toinen kokonaisena toisen luwun jokaisella osalla."*

Seuraavassa tehtävässä pyydetään jakamaan jana *kultaisen leikkauksen suhteessa*. Konstruktio on ensi yrittämällä kaikkea muuta kuin itsestään selvä — lukija yrittäköön itse keksiä sen, jos ei tunne ratkaisua ennestään. Tämä tehtävä on merkittävä monestakin syystä. Ensinnäkin kysessä on säännöllisen viisikulmion konstruoinnin olennainen kohta. Toiseksi tässä on prototyyppi sille, miten yleensäkin geometrisessa algebrassa ratkaistaan toisen asteen yhtälö. Kumpikin ongelma on vanha, ratkaisut arvattavasti jo Pythagoraan koulukunnan tuntemia, ehkä keksimiäkin.

TEHTÄVÄ 2.11. **(Kultainen leikkaus)** *On jaettava neliön sivu a kahteen osaan x ja $a - x$ siten, että toisen osan neliö on yhtä suuri kuin suorakulmio, jonka sivuina ovat toinen osa ja alkuperäinen sivu. Toisin sanoen on konstruoitava ratkaisu toisen asteen yhtälölle*

$$x^2 = a(a - x)$$



RATKAISU. Puolitetaan aluksi jana $a = AB$ kohdassa E (Kuvassa on merkitty $\frac{1}{2}a = c$.) ja konstruoidaan neliö $\square ABCD$. Valitaan F janan AB jatkeelta siten, että $EF = EC$. Etsitty jana x on yhtä pitkä kuin BF.

suuret kuin kaksi kertaa □KM:llä. Mutta □KN:llä = □MN:llä + □KM:llä. s) Sentähden □KN:llä = 2 kertaa □KM:llä. Waan KM = HI: p) siis on □KN:llä myös = 2 kertaa □HI:llä. Äsköin todistettiin, että □AK:lla = 2 kertaa □AH:lla. Sentähden on □AK:lla + □KN:llä = 2 kertaa □AH:lla + □HI:llä. Mutta neliö AN:llä = □AK:lla + □KN:llä. s) Siis on □AN:llä = 2 kertaa □AH:lla + □HI:llä. Onpa □AI:llä + □IN:llä = □AN:llä, s) ja niinmuodoin □AI:llä + □IN:llä = 2 kertaa □AH:lla + □HI:llä. Mutta kuin EI = IN, niin on wiimein □AI:llä + □EI:llä = 2 kertaa □AH:lla + □HI:llä.

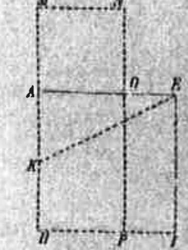
M. Olkoon AH = HE = 9 kyynärää ja EI = 5 kyynärää: siis AI = 23 ja HI = 14 kyynärää; niin on, esitelmän mukaan, $23^2 + 5^2 = 2 \times (9^2 + 14^2)$, se on: 529 + 25 = 554 kyynäränelliöä = 2 × (81 + 196) = 2 × 277 kyynäräneliöä. Jos AH = HE = h ja HI = a, niin on $(a + h)^2 + (a - h)^2 = 2 \times a^2 + 2 \times h^2$, niinkuin 9:ssä esitelmässä, joka onki tämän kanssa yhteellinen, niin että molemmat woitaisiin sanottaa näin: „Jos kaksi suoraa wiiwaa ollsi tietyssä, niin neliö yhdistetyillä wiiwoilla ynnä neliö wiiwalla, joka jääpi pienemmän leikattua suuremmasta, owat 2 kertaa neliöt yhteensä molemmilla wiiwoilla."

11. Esitelmä. Tehtäwä.

Kuinka tietty suora wiiwa leikataan kahteen osaan, jotta suorakulmio, sisälletty kokonaiselta wiiwalta ja toiselta osalta, on neliön suuruinen toisella osalla.

Olkoon AE suora wiiwa. Kuwaa sille neliö AI. a) Leikkaa AH keskeltä kahtia K:ssa. e) Yhdistä KE ja pitennä HA, kunnes KM = KE. h) Tee AM:lle neliö MO, a) ja pi-

a. 46 Esit. 1.
e. 10 Esit. 1.
h. 3 Esit. 1.



tennä NO wiiwalle HI; niin AE on O:ssa leikattu kahteen osaan, jotta suorakulmio AE × OE = AO².

Koska AH on leikattu keskeltä kahtia ja toinen wiiwa AM on liitetty siihen yhdeksi wiiwaksi; niin suorakulmio, sisälletty HM:ltä ja AM:ltä + ☐ KA:lla on yhtäsuuri kuin ☐ KM:llä. i) Mutta ☐ KM:llä = ☐ KE:llä, sillä KM = KE: k) sentähden suorakulmio, sisälletty HM:ltä ja AM:ltä + ☐ KA:lla = ☐ KE:llä. Waan ☐ KA:lla + ☐ AE:llä = ☐ KE:llä: l) siis on suorakulmio, sisälletty HM:ltä ja AM:ltä + ☐ KA:lla = ☐ KA:lla + ☐ AE:llä. Ota yhteinen ☐ KA:lla pois molemmin puolin, niin on suorakulmio, sisälletty HM:ltä ja AM:ltä = ☐ AE:llä. Mutta MP on suorakulmio, joka sisälletään HM:ltä ja AM:ltä, koska AM = MN, ja AI on neliö AE:llä. Sentähden on suorakulmio MP = ☐ AI. Ota pois molemmin puolin yhteinen suorakulmio AP; niin on jääpä neliö MO = jääpä suorakulmio OI. Mutta MO on neliö AO:lla ja OI suorakulmio, sisälletty AE:ltä ja OE:ltä, sillä AE = EI. Sentähden on suorakulmio, sisälletty AE:ltä ja OE:ltä = ☐ AO:lla.

i. 6 Esit. 2.
k. 7 Senr.
34 Esit. 1.
l. 47 Esit. 1.

12. Esitelmä. Wäittämä.

Tylsäkulmaisessa kolmikulmassa on neliö tylsän kulman wastakkaisella siwulla niin suuri kuin neliöt yhteensä wiereisillä siwuilla ynnä kaksi kertaa suorakulmio, joka sisälletään toiselta wiereiseltä siwulta ja sen ulkopuoliselta

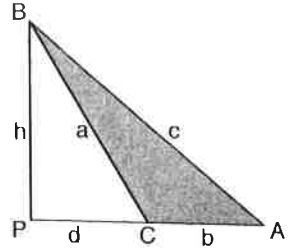
Nykyaikaisempi todistus jatkuisi huomaamalla, että Pythagoraan lause kolmioon $\triangle(ECB)$ antaa

$$c^2 + (2c)^2 = (c + b)^2 = c^2 + 2cb + b^2,$$

joten $4c^2 = 2cb + b^2$ eli $a^2 = ab + b^2$, kuten pitääkin. Eukleides korvaa nämä laskutoimitukset vastaavilla geometrisilla päättelyillä. Katsomme hieman yksityiskohtia, koska todistuksessa on mielenkiintoinen piirre: laskutoimituksia vastaavia tarkasteluja lyhennetään käyttämällä kerrankin jotain tietoa Alkeiden toisen kirjan lauseista:

Lauseen 2.6 mukaan suorakulmio $\square AFGI$ ja (kuvaan piirtämätön) neliö EB^2 ovat yhteensä yhtä suuret kuin (kuvaan piirtämätön) neliö EF^2. Mutta $EF = EC$, joten $EF^2 = EC^2$, josta Pythagoraan lauseen 1.47 mukaan $EF^2 = EC^2 = EB^2 + BC^2$. Siis suorakulmio $\square AFGI$ on yhtä suuri kuin BC^2 eli AB^2. Vähentämällä yhteinen osa, suorakulmio $\square ABHI$, päätellään, että suorakulmio $\square ABHI$ on yhtä suuri kuin neliö BF^2, mikä onkin väite. ☐

Lause 2.12. **(Kosinilause tylpälle kulmalle)**



Tylppäkulmaisen kolmion tylppää kulmaa vastassa olevan sivun neliö (c^2) *saadaan lisäämällä molempien muiden sivujen neliöiden summaan* $(a^2 + b^2)$ *kaksi kertaa sellainen suorakulmio, jonka toisena sivuna on toinen kolmion lyhyemmistä sivuista ja toisena etäisyys sitä vastaavan* korkeusjanan kantapisteestä *(kuva!) tylppään kulmaan* $(2bd)$.

TODISTUS. Pythagoraan lauseen 1.47 nojalla saadaan kolmioista $\triangle PCB$ ja $\triangle PAB$ kuvion merkinnöin $h^2 + d^2 = a^2$ ja $h^2 + (d+b)^2 = c^2$. Janojen summan neliölle on edellä todistettu binomikaava 2.4, jolla saadaan $h^2 + d^2 + 2db + b^2 = c^2$. Kaiken kaikkiaan:

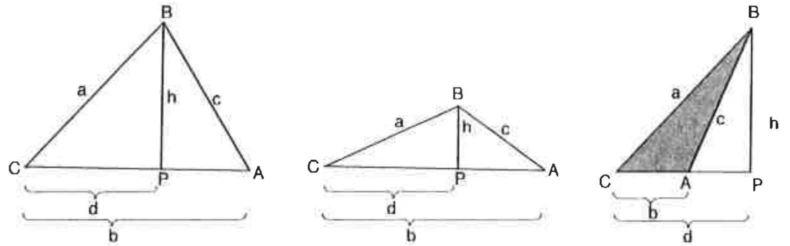
$$c^2 = h^2 + d^2 + 2db + b^2 = a^2 + 2bd + b^2.$$

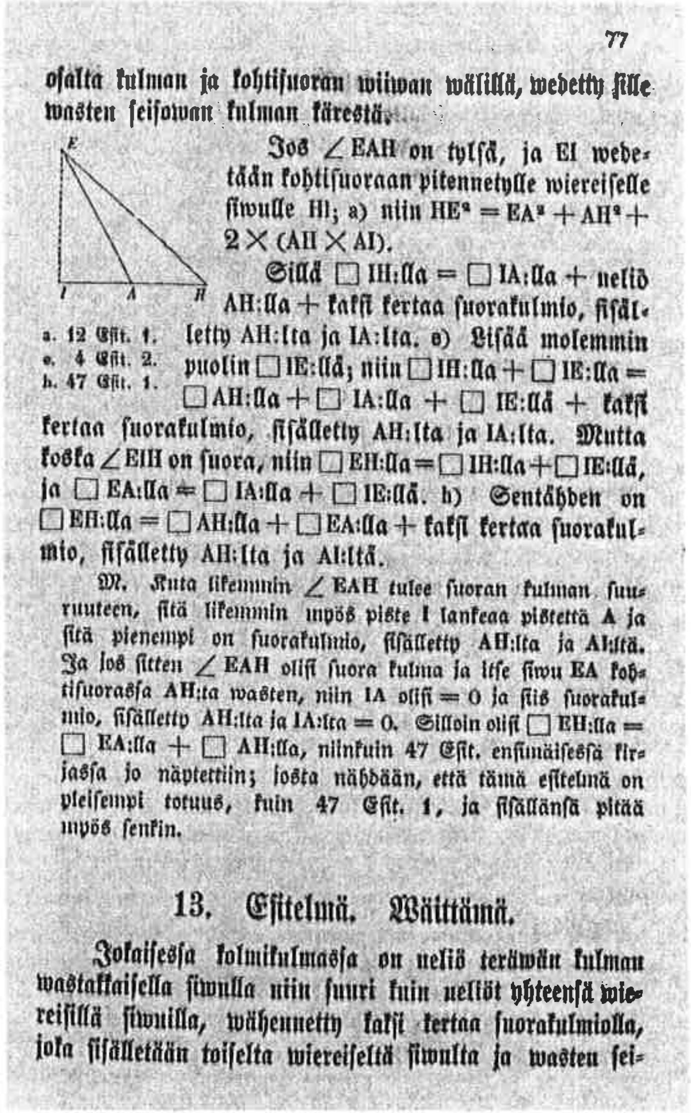
□

Alkeissa ei tietenkään käytetä lyhyitä algebrallisia merkintätapoja, jotka on keksitty paljon myöhemmin. Todistus on kuitenkin sama kuin yllä esitetty, kuten voi huomata lukemalla Aschanin tekstiä, joka on tässäkin kohdassa hyvä ja sanatarkka käännös.

Aschan liittää kosinilauseen perään muistutuksen, jossa olennaisesti esittelee kosinifunktion ominaisuuksia: Jos tylppä kulma $\angle C$ lähestyy suoraa kulmaa, niin korkeusjanan kantapiste P lähestyy kärkeä C ja suorakulmion ala $bd(= ba \cos C)$ lähestyy nollaa. Kun $\angle C$ on todella suora kulma, niin $d = 0$, ja siis $bd = 0$. Lauseen väite saa muodon $c^2 = a^2 + b^2$, joka on Pythagoraan lauseen 1.47 kaava. Aschanin mukaan tästä nähdään, että lause 2.12 on yleisempi totuus kuin 1.47 ja "pitää sisällänsä myös senkin". Tämähän ei pidä paikkaansa ihan kirjaimellisesti — lause 2.12 ei sano mitään suorakulmaisesta kolmiosta, vaan tylppäkulmaisesta.

LAUSE 2.13. **(Kosinilause terävälle kulmalle)** *Jokaisessa kolmiossa saadaan terävää kulmaa vastassa olevan sivun neliö* (c^2) *summaamalla kulman molempien kylkien neliöt ja* vähentämällä *summasta* $(a^2 + b^2)$ *kaksi kertaa sellainen suorakulmio, jonka toisena sivuna on toinen kyljistä ja toisena sitä kylkeä vastaavan korkeusjanan kantapisteen etäisyys alkuperäiseen kulmaan* $(2bd)$.




77

osalta kulman ja kohtisuoran wiiwan wälillä, wedetty sille wasten seisowan kulman kärestä.

Jos ∠EAH on tylsä, ja EI wedetään kohtisuoraan pitennetylle wiereiselle siwulle HI; a) niin HE² = EA² + AH² + 2 × (AH × AI).

Sillä □ IH:lla = □ IA:lla + neliö AH:lla + kaksi kertaa suorakulmio, sisälletty AH:lta ja IA:lta. e) Lisää molemmin puolin □ IE:llä; niin □ IH:lla + □ IE:lla = □ AH:lla + □ IA:lla + □ IE:llä + kaksi kertaa suorakulmio, sisälletty AH:lta ja IA:lta. Mutta koska ∠EIH on suora, niin □ EH:lla = □ IH:lla + □ IE:llä, ja □ EA:lla = □ IA:lla + □ IE:llä. h) Sentähden on □ EH:lla = □ AH:lla + □ EA:lla + kaksi kertaa suorakulmio, sisälletty AH:lta ja AI:ltä.

a. 12 Esit. 1.
e. 4 Esit. 2.
h. 47 Esit. 1.

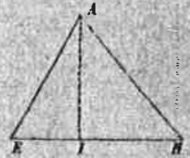
M. Kuta likemmin ∠EAH tulee suoran kulman suuruuteen, sitä likemmin myös piste I lankeaa pistettä A ja sitä pienempi on suorakulmio, sisälletty AH:lta ja AI:ltä. Ja jos sitten ∠EAH olisi suora kulma ja itse siwu EA kohtisuorassa AH:ta wasten, niin IA olisi = 0 ja siis suorakulmio, sisälletty AH:lta ja IA:lta = 0. Silloin olisi □ EH:lla = □ EA:lla + □ AH:lla, niinkuin 47 Esit. ensimäisessä kirjassa jo näytettiin; josta nähdään, että tämä esitelmä on yleisempi totuus, kuin 47 Esit. 1, ja sisällänsä pitää myös senkin.

13. Esitelmä. Wäittämä.

Jokaisessa kolmikulmassa on neliö teräwän kulman wastakkaisella siwulla niin suuri kuin neliöt yhteensä wiereisillä siwuilla, wähennetty kaksi kertaa suorakulmiolla, joka sisälletään toiselta wiereiseltä siwulta ja wasten sei-

78

sowasta kulmasta wedetyn kohtisuoran wiiwan ja teräwän kulman wäliseltä wiiwalta.



Jos △ AEH kolmikulmassa EAH on teräwä ja AI wedetään A:sta kohtisuoraan wiereiselle siwulle EH; a) niin AH² = AE² + EH² — 2 × (EH × EI).

Sillä □ EH:lla + □ EI:llä = neliö IH:lla + 2 kertaa suorakulmio, sisälletty EH:lta ja EI:ltä. e) Lisää molemmin puolin □ AI:llä; niin □ EH:lla + neliö EI:llä + □ AI:llä = □ IH:lla + □ AI:llä + 2 kertaa suorakulmio, sisälletty EH:lta ja EI:ltä. Mutta □ AE:llä = □ EI:llä + □ AI:llä, ja neliö AH:lla = □ IH:lla + □ AI:llä, sillä ∠ AIE ja ∠ AIH owat suoria. h) Sentähden on □ EH:lla + □ EA:lla = □ AH:lla + 2 kertaa suorakulmio, sisälletty EH:lta ja EI:ltä. Ota pois molemmin puolin suorakulmio, sisälletty EH:lta ja EI:ltä; niin on □ AH:lla = □ EH:lla + □ EA:lla — 2 kertaa suorakulmio, sisälletty EH:lta ja EI:ltä. i).

a. 12 Esit. 1.
e. 7 Esit. 2.
h. 47 Esit. 1.
i. 3 Selw.

M. Tämä esitelmä on edellisen wertainen, ja sama muistutus, joka seuraa sitä, koskee tähänkin.

14. Esitelmä. Tehtäwä.

Kuinka tehdään neliö tietyn suorawiiwaisen kuwion suuruiseksi?

Tee neliö = kuwio A.

Wiiwaa ensin suorakulmio EI = kuwio A. a) Jos nyt EK olisi = KI, niin □ EI olisi jo tehty = kuwio A. Waan ellei EK = KI, niin pitennä EK ja tee KN = KI. e) Leikkaa

a. 45 Esit. 1.
e. 9 Esit. 1.
h. 10 Esit. 1.

Lause 2.13 on muotoiltu koskemaan mielivaltaisen kolmion terävää kulmaa, mutta vanhoissa käsikirjoituksissa sanotaan hämäräperäisesti, että tutkitaan *teräväkulmaisessa kolmiossa terävän kulman vastaista sivua.* Lause pätee joka tapauksessa kaikissa kolmioissa, kunhan tarkastellaan terävää kulmaa. Todistukseen tulisi kyllä pieniä eroja.

TODISTUS. Kuvan merkinnöin on todistettava, että $c^2 = a^2 + b^2 - 2bd$. Todistus on idealtaan samanlainen kuin tylpän kulman tapauksessa. Seuraamme Alkeiden järjestystä: Olkoon $\triangle ABC$ teräväkulmainen, erityisesti kulma C terävä. Konstruoidaan apuviivaksi korkeusjana BP eli h.

Janojen erotuksen neliölle on edellä todistettu kaava $(a-b)^2 + 2ab = a^2 + b^2$ [2.7]. Sovelletaan sitä valiten a:n rooliin kuvion b ja b:n rooliin d, jolloin saadaan $(b-d)^2 + 2bd = b^2 + d^2$. Lisätään kumpaankin vielä neliö h^2 ja saadaan

$$(b-d)^2 + h^2 + 2bd = b^2 + h^2 + d^2.$$

Pythagoraan lauseen 1.47 mukaan $h^2 + d^2 = a^2$ ja $(b-d)^2 + h^2 = c^2$, joten

$$c^2 + 2bd = b^2 + a^2,$$

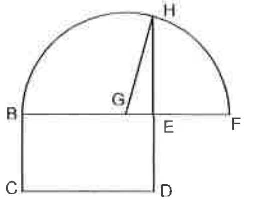
mistä väite seuraa vähentämällä puolittain $2bd$, siis samoista samat. Tylppäkulmaisen kolmion tapauksessa tilanne on jommankumman oikeanpuoleisen kuvion mukainen ja suorakulmainen tapaus on Pythagoraan lauseen tilanne kuten Aschankin lyhyesti mainitsee. □

Nykymerkinnöin lasku olisi lyhyt:

$$a^2 - d^2 = h^2 = c^2 - (b-d)^2 = c^2 - b^2 + 2bd - d^2.$$

TEHTÄVÄ 2.14. *Konstruoi annetun monikulmion kokoinen neliö.*

RATKAISU.



Konstruoidaan aluksi annetun monikulmion A kokoinen suorakulmio $\square BCDE$ [1.45]. Jos se on neliö, on tehtävä ratkaistu. Muuten jatketaan pitempää sivua — olkoon se BE — lyhemmän sivun verran pisteeseen F ja konstruoidaan näin saadun janan BF keskipiste G. Piirretään G-keskinen GF-säteinen ympyrä, jolla myös B on. (Koska G on janan BF keskipiste, BF on ympyrän halkaisija ja muodostuu puoliympyrä, kaksikin.) Suora ED leikatkoon (valittua) puoliympyrää pisteessä H. Väitetään, että EH^2 on vaaditunlainen neliö. Binomilauseen version 2.5 mukaan $(BE \times EF) + GE^2 = GF^2$, missä merkintä $(BE \times EF)$ edustaa suorakulmiota, jonka sivut ovat pituudeltaan BE ja EF, siis esimerkiksi (monikulmion A kokoista) suorakulmiota $\square BCDE$, sillä $EF = ED$. Tietenkin $GF^2 = GH^2$ ja Pythagoraan lauseen 1.47 mukaan $GH^2 = GE^2 + EH^2$.

$$(BE \times EF) + GE^2 = GF^2 = GH^2 = GE^2 + EH^2.$$
$$(BE \times EF) = EH^2.$$

□

Aschan ei kommentoi konstruktiota mitenkään, vaikka Eukleides on sijoittanut sen komeasti toisen kirjan loppuun, koska se ratkaisee monikulmion neliöinnisen ongelman.

Ongelman ratkaisun olemassaolo merkitsee, että jos halutaan abstraktin geometrisen algebran kuvastavan kaikkia harppi-viivainkonstruktioita, niin sen laskusääntöjä tulee laajentaa vähintäänkin aksioomalla, joka sanoo että jokaisella pinta-alatyyppisellä alkiolla on *neliöjuuri*, joka on pituus- eli janatyyppinen alkio.

79

EN keskeltä kahtia O:ssa, h) ja wiiwaa puoliympyrä, jonka keskipiste on O ja kehä käy E:n ja N:än läpi. Pitennä IK kehälle EMN; niin KM on siwu neliölle, joka on yhtäsuuri kuin kuwio A.

Yhdistä OM. Koska suora wiiwa EN on jaettu kahteen yhtäsuureen osaan O:ssa ja kahteen erisuureen osaan K:ssa; niin suorakulmio, sisälletty EK:lta ja KN:ltä + □ OK:lla = □ ON:llä. i) Mutta EI on suorakulmio, sisälletty EK:lta ja KN:ltä, sillä KN = KI; niinmuodoin on suorakulmio EI + □ OK:lla = □ ON:llä, eli = □ OM:llä, koska ON = OM. k) Waan □ OM:llä = □ OK:lla + □ MK:lla, koska ∠ OKM on suora. l) Sentähden on suorakulmio EI + □ OK:lla = □ OK:lla + □ KM:llä. Ota yhteinen □ OK:lla molemmin puolin pois, niin jääpä suorakulmio EI = □ KM:llä. Mutta suorakulmio EI on tehty = kuwio A: siis on □ KM:llä = kuwio A.

i. 5 Esit. 2.
k. 7 Seur.
34 Esit. 1.
l. 47 Esit. 1.