ROLF NEVANLINNA

GEOMETRIAN PERUSTEET

PORVOO · HELSINKI
WERNER SÖDERSTRÖM OSAKEYHTIÖ

ISBN 951-0-06129-8

Werner Söderström Osakeyhtiön
kirjapaino Porvoo 1973

SISÄLLYS

ALKULAUSE VII

JOHDANTO IX

I. AFFIINIGEOMETRIA 1
§1. Insidenssijärjestelmä 1
§2. Suoran pisteiden järjestys 11
§3. Aksiomijärjestelmän I. 1—3, II. 1—4 ristiriidattomuus ja epätäydellisyys 18
§4. Puolisäde, puolitaso, kulma, kolmio 20
§5. Dedekindin aksiomi 25
§6. Yhdensuuntaisista suorista 26
§7. Vektorien yhdenssuntaisuus-siirto 31
§8. Vektorialgebra 36
§9. Affiinit koordinaatistot 45
§10. Affiinin geometrian täydellisyys 49
§11. Koordinaattimuunnoksista 52

II. KONGRUENSSIOPPI 55
§1. Janojen yhteneväisyys 55
§2. Kulmien yhteneväisyys 60
§3. Euklidinen geometria 66
§4. Lorentz-Minkowskin geometria 78
§5. Galilei-geometria 92

III. AFFIINI GEOMETRIA JA PROJEKTIIVI GEOMETRIA . . 96

KIRJALLISUUTTA 100

HAKEMISTO 101

ALKULAUSE

Vuodesta 1927 lähtien olen Helsingin, Zürichin ja eräissä muissa yliopistoissa toistuvasti luennoinut geometrian loogisista perusteista. Monelta taholta on minua pyydetty julkaisemaan nämä luentoni. Koska samoja kysymyksiä on käsitelty lukuisissa teoksissa, olen epäillyt, onko syytä saattaa luentoni julkisuuteen. Kun nyt sen kuitenkin teen, on päätökseeni vaikuttanut kuuntelijoiden osoittama kiinnostus sekä ennen kaikkea se, että esitykseni osalta sekä muodollisesti että asiallisesti poikkeaa siitä, mitä alan kirjallisuus sisältää.

Teokseni on tarkoitettu kurssikirjaksi matemaattisten aineiden opiskelijoita, erityisesti koulunopettajiksi valmistautuvia varten. Se soveltuu myös logiikan ja filosofian opiskelijoiden sekä eksaktin tutkimuksen peruskysymyksistä kiinnostuneiden harrastelijoiden luettavaksi.

Seuraavassa johdannossa esitän eräitä päänäkökohtia, joita näissä luennoissani olen pitänyt silmällä.

Professorit Gustaf Järnefelt, Oiva Ketonen, Paul Kustaanheimo ja yo Pertti Kivimäki ovat huomautuksillaan antaneet minulle tärkeitä virikkeitä, jotka kiitollisuudella olen ottanut huomioon esityksessäni.

Lausun myös kiitokseni kustantajalle, joka on suostunut julkaisemaan nämä luentoni.

Helsingissä, maaliskuussa 1972

Rolf Nevanlinna

JOHDANTO

Näiden luentojen tarkoituksena on 1) rakentaa kaksiulotteisen *affiinin geometrian* järjestelmä, sekä 2) tutkia tämän järjestelmän *metrisoimisprobleemaa*, janojen ja kulmien kongruenssi-opin konstruoimiseksi tarjoutuvia eri mahdollisuuksia.

Affiiniin tasogeometrian aksiomaattiseksi perusteluksi seuraamme klassisia menettelyjä. Tämän opin *perusobjekteiksi* eli *-alkioiksi* valitsemme kaksi joukkoa: *pisteiden* joukon ja *suorien* joukon. Näitä yhdistää kaksi *perusrelaatiota* eli *-suhdetta: insidenssin* suhde (»piste on suoralla») ja *järjestyksen* suhde (»kolmesta saman suoran pisteestä sijaitsee yksi molempien muiden välissä»).

Perussäännöt eli *aksiomit* sisältävät sääntöjä, joita perusobjektien sekä perussuhteiden oletetaan noudattavan.

Aksiomaattisissa opeissa on tapana heti esityksen alkuun luetella aksiomit, jotka määräävät perusalkioiden ja -suhteiden muodostaman järjestelmän struktuurin eli rakenteen. Poiketen tästä menettelystä rakennamme affiinin geometrian asteettain. Insidenssin ja järjestyksen aksiomit asetetaan perättäisesti. Ennen kuin uusi aksiomi lisätään jo asetettujen aksiomien joukkoon, tutkitaan kulloinkin, ovatko ne kolme vaatimusta voimassa, jotka jokaisen ankaran matemaattisen teorian on täytettävä. Nämä ovat: 1) asetettujen aksiomien tulee olla keskenään loogisesti *ristiriidattomia;* 2) niiden tulee olla toisistaan loogisesti *riippumattomia;* 3) aksiomijärjestelmän tulee olla *täydellinen.*

Ehto 1) sisältää sen, että asetettu aksiomisysteemi (A) ei sisällä välitöntä (eksplisiittistä) ristiriitaa eikä myöskään välillistä (implisiittista) ristiriitaa, minkä aksiomien perusteella suoritettu looginen deduktio toisi ilmi.

Ehto 2) vaatii, että systeemi (A) ei sisällä aksiomia A_0, joka voitaisiin loogisesti johtaa muista aksiomeista (A). Jos näin olisi laita, voitaisiin lause A_0 poistaa oletettujen peruslauseiden (aksiomien) joukosta. Se siirtyisi silloin loogisesti johdettavien (todistettavien), ns. teoreemain joukkoon.

Kolmas vaatimus 3) vihdoin sisältää sen että, lyhyesti sanottuna, aksiomit (A) *yksikäsitteisesti* kiinnittävät niiden pohjalta rakennettavan affiinin geometrian järjestelmän loogisen rakenteen.

Näitä kolmea loogista peruskysymystä tutkimme siis asteettain. Kulloinkin jo asetettua aksiomijärjestelmää (A) tarkastellaan ristiriidattomuus- ja riippumattomuuskysymyksen kannalta. Jos se täyttää nämä ehdot (1) ja 2)), mutta ei vielä ole loogisesti täydellinen (ehto 3)), se voidaan täydentää, siten että jokin A-järjestelmästä loogisesti riippumaton, perusobjekteja ja perussuhteita koskeva lause A' lisätään siihen uudeksi aksiomiksi. Näin saatu laajennettu aksiomisysteemi ((A) ynnä A') täyttää edelleenkin vaatimukset 1) ja 2), mutta se saattaa vieläkin jäädä epätäydelliseksi (ehto 3) ei siinäkään ole voimassa). Aksiomijärjestelmä voidaan silloin edelleenkin täydentää, ja näin jatketaan, kunnes (riippumattomuus- ja ristiriidattomuusehtojen lisäksi) täydellisyydenkin vaatimus 3) toteutuu.

On merkillistä, että tämä päämäärä voidaan saavuttaa äärellisellä määrällä aksiomeja (A). Esityksessämme tulemme lopuksi *kymmenen* aksiomin muodostamaan järjestelmään, jossa kaikki vaatimukset 1), 2), 3) on täytetty. Nämä aksiomit tiivistävät koko affiinin tasogeometrian suppeaan muotoon: jokainen lausuma, joka koskee pisteiden ja suorien insidenssiä ja järjestyksen suhdetta on *joko* aksiomien looginen seuraus (oikea lause) *tai* ristiriitainen (väärä lause).

Kun affiini tasogeometria siten on loogisesti täydellinen, suljettu järjestelmä, on kaikki käsitteet (objektit ja suhteet), jotka siinä otetaan käytäntöön, *määriteltävä* annettuja peruskäsitteitä (pisteitä, suoria, insidenssin ja järjestyksen suhteita käyttämällä). Näin menettelemme myös, kun siirrymme (luku II) tutkimaan affiinin tason *metrisoimisprobleemaa*, janojen ja kulmien yhteneväisyyden eli kongruenssin määrittelyyn ja niiden mittaamisen kysymykseen.

Yhdensuuntaisten janojen ja myös kulmien suhteen kongruenssin käsite luonnollisella tavalla voidaan määritellä affiinin yhdensuuntaisuusopin avulla.

Kun sen jälkeen käymme tutkimaan mahdollisuuksia laajentaa kongruenssioppia käsittämään *erisuuntaisia janoja*, noudatamme *permanenssin* periaatetta, joka yleensäkin on tärkein matemaattisten käsitteiden yleistämisprosessien johtava prinsiippi.

Jos tällöin aluksi halutaan säilyttää vain yhdensuuntaisten janojen kongruenssin perusominaisuus, että se on *ekvivalenssi* (s.o. refleksiivi, symmetrinen ja transitiivi suhde), seuraa siitä, että (erisuuntaistenkin) janojen kongruenssi tulee täysin määrätyksi, kun on annettuna piste O ja pisteistö (E), joka on O:n suhteen symmetrinen ja »tähtimäinen», s.o. jokainen O:n kautta kulkeva suora sisältää täsmälleen kaksi, O:n suhteen symmetristä pistettä E. Nimitämme joukkoa (E) O-keskiseksi *mittaviivaksi* (välttäen aluksi nimitystä »ympyrä»). Janojen kongruenssi tulee yksikäsitteisesti kiinnitetyksi, jos mittaviivan kaikki »säteet» OE määritellään kongruenteiksi.

Jos erityisesti mittaviiva E on *kupera*, vallitsee affiinissa tasossa metrinen geometria, minkä tämän vuosisadan alussa MINKOWSKI esitti.[1]

Mittaviiva E ei vielä salli kongruenssin käsitteen laajentamista *kulmia* koskevaksi. Mutta tässäkin permanenssin periaatteen noudattaminen vie eteenpäin. Kulmien kongruenssin yksikäsitteiseksi kiinnittämiseksi janojen kongruenssien avulla on välttämätöntä ja riittävää, että janojen kongruenssi toteuttaa erään erikoisen ehdon, joka kyllä on voimassa yhdensuuntaisten kulmien erikoistapauksessa. Jos tämä ehto, jota nimitämme *postulaatiksi* III, asetetaan, se suuresti rajoittaa mittaviivan valintaa, seuraavalla tavalla.

1) Jos mittaviiva sisältää kolme pistettä A, B, C, jotka keskipisteen O suhteen muodostavat *kuperan* kuvion, on E *ellipsi*. Näin metrisoitu affiini järjestelmä on *euklidinen* tasogeometria.

2) Jos kuvio ABC on kovera O:n suhteen, on E kahden *liittohyperbelin* muodostama. Näin metrisoitu affiinitaso muodostaa *Lorentzin—Einsteinin—Minkowskin* geometrian, missä tasolla on yksi ajallinen ja toinen paikallinen ulottuvuus.

Tason kierron määrittelee tällöin suhteellisuusteorian Lorentz-muunnos.

---

[1] Yleistettynä ääretöntä ulottuvuutta olevaan affiiniin avaruuteen Minkowskin geometria vastaa BANACH'in v. 1930 esittämää geometriaa.

3) Jos vihdoin A, B, C ovat suoralla viivalla, mittaviiva E muodostuu kahdesta yhdensuuntaisesta suorasta. Näin metrisoitua affiinia järjestelmää nimitän Galilei-geometriaksi, koska sen kierrot (ortogonaalimuunnokset) ovat samat kuin klassillisen fysiikan Galilei-muunnokset.

Luentojeni päätteeksi esitetään vielä, miten affiinigeometria permanenssiperiaatteen nojalla täydennetään projektiivigeometriaksi.

I AFFIINIGEOMETRIA

§ 1. Insidenssijärjestelmä

1.1. Perusalkiot

Tasogeometrian tutkimus kohdistuu *kahteen alkiojoukkoon*, jotka oletetaan annetuksi. Ne ovat:

A. Joukko alkioita (P), joita nimitetään »*pisteiksi*»;

B. Joukko alkioita (L), joita nimitetään »*suoriksi*».

1.2. Yhdistely- eli insidenssisuhde

Kuten yleensäkin joukko-opissa, pelkistä joukoista (P) ja (L) ei sinänsä ole paljoakaan sanottavaa, niin kauan kuin näihin joukkoihin ei sisälly mitään erityisiä lisäoletuksia, jotka rajoittavat niiden muodostaman järjestelmän *rakennetta* eli *struktuuria*. Alkeisgeometrian systeemin varsinainen problematiikka alkaa vasta silloin, kun perusalkioiden (P) ja (L) joukot varustetaan näiden alkioiden välisillä rakenteellisilla *suhteilla* eli *relaatioilla*. Tällainen perusrelaatio on

I. Insidenssin eli yhdistelyn perussuhde. *Jos P on piste ja L suora, oletetaan edeltäkäsin annetuksi, vastaavatko ne toisiaan vai eivätkö ne vastaa toisiaan.*

Edellisessä tapauksessa sanotaan pistettä P ja suoraa L *insidenteiksi*; jälkimmäisessä tapauksessa ne eivät ole insidenttejä.

Jos olioihin »piste» ja »suora» liitetään luonnollista geometrista havaintoamme vastaava kuva, niin ne ovat insidenttejä, jos »piste on suoralla» (eli »suora kulkee pisteen kautta»), jota vastoin ne eivät ole insidenttejä, jos »piste on suoran ulkopuolella» (eli »suora ei kulje pisteen kautta»). Tämä luonnollinen havaintopohja on johtanut abstraktisemman insidenssikäsitteen muodostamiseen. Geometrian *loogisen rakenteen* kannalta tuo havainnollinen kuva ei kuitenkaan ole oleellinen. Vieläpä on tärkeä, että geometrian looginen tutkimus alun pitäen vapautetaan siitä. Alkioita »piste» ja »suora» ei välttämättä ole tulkittava niihin alkuaan liittyvien »geometristen hahmojen» mukaan (kuten: »piste on avaruuden kohta, jolla ei ole mitään ulottuvuutta» tai »suora on yksiulotteinen viiva, joka ei käyristy»). Ne on käsitettävä joukoiksi olioita (P) ja (L), joihin ei liity mitään erityisiä *laadullisia* ominaisuuksia. Joukon käsitteen pohjana on ainoastaan olettamus, että kahdesta sen oliosta (esim. pisteestä P_1, P_2) tiedetään, ovatko ne *identtisiä* $(P_1 = P_2)$ vai *erillisiä* $(P_1 \neq P_2)$.

Vastaavasti insidenssisuhde on vapautettava siihen alkuaan liittyvästä geometris-havainnollisesta »hahmosta»; jäljelle jää vain abstraktisempi olettamus, että toisaalta eräät »pisteet» toisaalta eräät »suorat» *vastaavat* toisiaan, jolloin ne nimitetään insidenteiksi.

Pisteen P ja suoran L insidenssin ilmoitamme seuraavassa lyhyesti merkinnällä: $P — L$. Jos ne eivät ole insidenttejä, merkitään $P \not— L$.

1.3. Insidenssiaksiomit

Perusolioiden (P) ja (L) sekä niiden välisten insidenssien oletetaan lisäksi noudattavan eräitä *perussääntöjä* eli *aksiomia*. Asetetaan aluksi seuraavat yksinkertaiset *insidenssi-* eli *yhdistelyaksiomit*:

Aksiomi I.1. *Jokaisella suoralla L on vähintään kaksi eri pistettä P_1 ja P_2, eli merkein: Jos L on suora, on vähintään kaksi pistettä P_1 ja P_2 $(P_1 \neq P_2)$, niin että $P_1 — L$ ja $P_2 — L$.*

Aksiomi I.2. *Jokaisen pisteen P kautta kulkee ainakin kaksi suoraa (P:n ollessa annettu, on ainakin kaksi suoraa L_1 ja L_2 $(L_1 \neq L_2)$, niin että $P — L_1$, $P — L_2$).*

Aksiomi I.3. *Kahden eri pisteen kautta kulkee yksi ja vain yksi suora (jos $P_1 \neq P_2$, on täsmälleen yksi suora L, niin että $P_1 — L$, $P_2 — L$).*

Näistä insidenssiaksiomeista seuraa esim:

Lause 1.1. *On olemassa ainakin kolme eri pistettä.*

Lause 1.2. *On olemassa ainakin kolme eri suoraa.*

Lause 1.3. *Jokaisen suoran ulkopuolella on ainakin yksi piste.*

Lause 1.4. *Jos P on mielivaltainen piste, on ainakin yksi suora L, joka ei kulje P:n kautta.*

Esimerkiksi todistamme lauseen 1.3: Jos L on suora, on ainakin yksi piste P, siten että $P \not- L$.

T o d i s t u s. Suoralla L on ainakin kaksi pistettä P_1, P_2 (Aks. I.1). P_1:n kautta kulkee suora $L_1 \neq L$ (Aks. I.2). Suoralla L_1 on piste $P_3 \neq P_1$ (Aks. I.1). Piste $P_3 \not- L$, sillä muuten olisi L:llä ja L_1:llä kaksi yhteistä pistettä, P_1 ja P_3, ja olisi siis $L = L_1$ (Aks. I.3), vastoin yllä havaittua ($L_1 \neq L$). L:n ulkopuolella on siis ainakin yksi piste, nimittäin P_3.

1.4. Aksiomijärjestelmän I. 1—3 ristiriidattomuus

Yllä olevassa todistuksessa olemme käyttäneet epäsuoraa päättelyä. Osoittaaksemme, että $P_3 \not- L$, oletimme antiteesin $P_3 — L$, ja siitä johdettiin ristiriita. Antiteesi oli ristiriitaisena siis hylättävä. Epäsuoran päättelytavan kaavaa noudattaen päätettiin tästä edelleen, että teesi, väite $P_3 \not- L$ on oikea.

Mutta onko tämä päätelmä loogisesti sitova? Antiteesi tosin oli hylättävä, sillä matematiikka ei hyväksy loogisia ristiriitoja. Mutta miten on siitä johdetun lauseen laita: »koska antiteesi osoittautui vääräksi (ristiriitaiseksi), niin on sen vastakkainen lause, teesi, oikea»? Itse asiassa tämä johtopäätös ei ole sitova. Sillä voisihan olla, että *myös tuo teesi*, yhdessä aksiomien I. 1, 2, 3 kanssa, sisältäisi ristiriidan. Epäsuoran päättelyn edellytyksenä on siis, että annettu aksiomisysteemi on *ristiriidaton* järjestelmä.

Mitä keinoja on tarjolla tämän ristiriidattomuusongelman ratkaisemiseksi?

Ensiksi on välttämätöntä, että aksiomit eivät sisällä eksplisiittistä, ilmeistä ristiriitaa: niin olisi, jos järjestelmässä olisi kaksi aksiomia, joiden väitteet, B ja $\bar{B}$, samoilla olettamuksilla, ovat suoranaisessa ristiriidassa keskenään (toinen aksiomi väittää, että B pätee, toinen, että $\bar{B}$ pätee).

Mutta tämä ei vielä riitä. Sillä vaikka aksiomit eivät sisällä eksplisiittistä ristiriitaa, se ei vielä sulje pois mahdollisuutta, että aksiomijärjestelmä olisi *implisiittisesti* ristiriitainen, niin että aksiomeista loogisin päättelyin voitaisiin johtaa kaksi lausetta T ja $\bar{T}$, jotka sisältäisivät välittömän, eksplisiittisen ristiriidan.

Matemaattisen järjestelmän ristiriidattomuuskysymys onkin ongelmallinen. Koska aksiomeista (A) voidaan loogisesti johtaa yhä uusia seurauksia, teoreemoja, viimeksi mainittuja yleensä on rajaton lukumäärä, joiden muodostamaa kokonaisuutta ei välittömästi voi hallita. Siten aksiomien muodostaman järjestelmän implisiittinen ristiriidattomuus yleensä ei ole helposti nähtävissä.

Itse asiassa tätä ongelmaa ei aina voikaan selvittää pysymällä kyseessä olevan aksiomaattisen teorian S sisällä, sen omissa puitteissa. Sen ratkaisemiseksi järjestelmän S peruselementit (sen perusoliot ja sen perussuhteet) on asetettava suhteeseen johonkin *toiseen järjestelmään* S_1, jonka ristiriidattomuus joko *on ilmeinen* tai *oletetaan palkkansa pitäväksi*: S:n peruselementit *kuvataan* järjestelmään S_1, siten että ne yksikäsitteisesti vastaavat eräitä S_1-järjestelmän käsitteitä. S:n 'kuvaksi' saadaan siten S_1:n eräs osajärjestelmä S_1', ja S:n jokainen mielekäs lausuma saa tietyn kuvalauseen järjestelmän S_1 puitteissa.[1]

Jos näin saatu järjestelmän S »kuvajärjestelmä» eli »malli» S_1' täyttää ehdon, että S:n aksioomien (A) kuvalauseet (A_1) ovat S_1-järjestelmän oikeita (ristiriidattomia) lauseita (so. joko ne ovat S_1:n aksiomia tai sen oikeiksi todistettuja lauseita), niin seuraa S_1-järjestelmän edellytetystä ristiriidattomuudesta, että järjestelmä S:kään ei voi sisältää loogista ristiriitaa.

Tähän periaatteeseen perustuu pohjimmiltaan jokainen yritys ratkaista jonkin matemaattisen teorian ristiriidattomuus. Yllä oleva, yleisyydessään ehkä hiukan abstrakti selitys tulee helpommin tajuttavaksi, kun käymme selvittämään yksinkertaisen insidenssijärjestelmän (I. 1, 2, 3) ristiriidattomuutta. Yllä esitetyn periaatteen soveltamista helpottaa tällöin, että tuon järjestelmän kuvaamiseksi voidaan käyttää *finiittistä* mallia S_1', joka sisältää vain *äärellisen määrän* perusalkioita.

[1] Sanomme aksiomijärjestelmän S lausumaa *mielekkääksi*, jos se sanoo jotakin S:n perusolioista ja perussuhteista (välittämättä siitä, onko lausuma S:n oikea tai väärä lause). Esim. yllä esitetyssä suppeassa insidenssiärjestelmässä, jota kolme aksiomia I. 1.2.3 säännöstelee, lausuma »on vain yksi suora» on mielekäs, mutta väärä.

Aksiomijärjestelmän I. 1—3 *ristiriidattomuus.* Tämä järjestelmä toteutuu esimerkiksi seuraavassa yksinkertaisessa »mallissa» joka sisältää täsmälleen kolme pistettä P_1, P_2, P_3 ja kolme suoraa L_1, L_2, L_3, ja missä insidenssisuhde on annettu seuraavan taulukon osoittamalla tavalla:

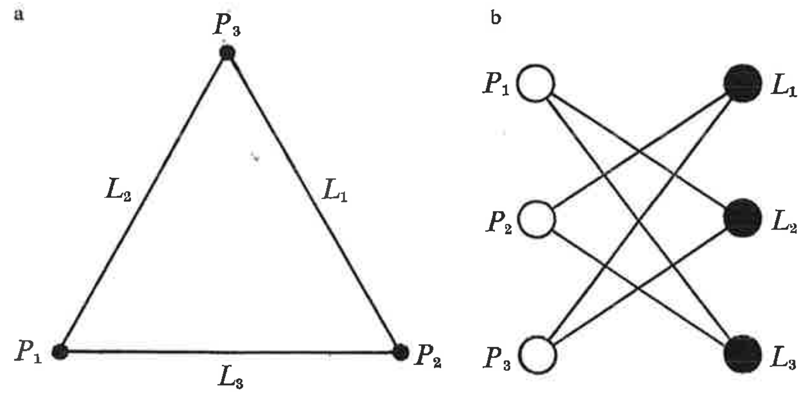
$$(M)\qquad \begin{array}{lll} P_1 - L_2, & P_1 - L_3, & P_1 \not- L_1, \\ P_2 - L_3, & P_2 - L_1, & P_2 \not- L_2, \\ P_3 - L_1, & P_3 - L_2, & P_3 \not- L_3. \end{array}$$

Jokainen peruskäsitteitä (piste, suora, insidenssi) koskeva lausuma on tässä mallissa M joko oikea tai väärä. Aksiomien I. 1—3 lausumat ovat siinä ilmeisesti oikeat. Siitä seuraa, että järjestelmä I. 1—3 on ristiriidaton. Sillä jos aksiomeista I. 1—3 loogisin päätelmin johdetaan uusia lauseita T, voidaan tällaista päättelyketjua askel askeleelta seurata mallin M avulla, kunnes siinä tullaan lausetta T vastaavaan lauseeseen. Mutta koska M-järjestelmä on ristiriidaton, niin päättelyketju ei voi johtaa kahteen lauseeseen T ja $\overline{T}$, jotka sisältäisivät ilmeisen ristiriidan. Aksiomijärjestelmä I. 1—3 on siis ristiriidaton.

M-mallin sijasta voidaan ko. ristiriidattomuustodistusta varten käyttää muitakin konkreettisia, äärellisiä malleja, näiden joukossa erityisesti sellaisia, jotka ovat *isomorfeja* M:n kanssa, so. sellaisia, joiden peruskäsitteet (pisteet, suorat, insidenssit) voidaan asettaa parittaiseen vastaavuuteen M-mallin peruskäsitteiden kanssa.

Kuviossa 1 on kaksi tällaista mallia. Vasemmalla on merkitty kolme pistettä P_1, P_2, P_3 ja kolme suoraa L_1, L_2, L_3, ja insidenssisuhde on annettu tavallisen geometrisen havainnon mukaan. Oikealla pisteet on esitetty valkoisina palloina, suorat mustina palloina ja insidenssejä osoittaa valkoista ja mustaa palloa yhdistävä rihma.

Yllä esitetty aksiomijärjestelmän I. 1—3 ristiriidattomuustodistus pätee silloinkin, kun todistusketjussa jokin lause T todistetaan epäsuoraa päättelyä käyttämällä. Jos näet T:n vastalause, (antiteesi) $\overline{T}$ osoitetaan ristiriitaiseksi, se ei voi toteutua mallissa M. Koska kahdesta vastakkaisesta lausumasta vain *jompikumpi* pätee »kuviossa» M,



Kuvio 1 a ja b.

niin lausumista T ja $\bar{T}$ vain edellinen on toteutettu mallissa M, ja päättelyketjussa saadut lauseet, erityisesti siis T, muodostavat ristiriidattoman systeemin.

1.5. Aksiomien riippumattomuus

Aksiomijärjestelmän (A) kriittinen tarkastelu johtaa ristiriidattomuusongelman ohella toiseenkin perustavaan kysymykseen: Ovatko aksiomit *loogisesti riippumattomia* toisistaan? Jos järjestelmä sisältää aksiomin A_0, joka on muiden aksiomien (A) looginen seuraus, voidaan aksiomisysteemi supistaa: Aksiomi A_0 poistuu aksiomien joukosta ja siirtyy todistettavien lauseiden, teoreemain joukkoon.

Riippumattomuusongelmaakaan yleensä ei voi ratkaista annetun järjestelmän (A) omissa puitteissa. Jos epäillään aksiomin A_0 olevan muiden aksiomien (A_1) looginen seuraus, ja pyritään todistamaan A_0 aksiomien (A_1) avulla, niin tällaisen yrityksen epäonnistuminen ei vielä takaa A_0-lauseen riippumattomuutta. Sillä voisihan A_0:n todistaminen lauseiden (A_1) seuraukseksi myöhemmin kenties sittenkin onnistua.

Kuuluisimman esimerkin tällaisesta jatkuvasta epävarmuudesta tarjoaa paralleeliaksiomin historia. Kahden vuosituhannen aikana geometrian tutkijat turhaan ponnistelivat todistaakseen yhdensuuntaisuuslauseen Eukleideen muiden aksiomien avulla. Aikaa myöten vahvistui käsitys, että tuo aksiomi on riippumaton lause. Lopulliseen selvyyteen päästiin vasta 1830-luvulla, jolloin J. BOLYAI ja N. LOBATSCHEWSKI (toisistaan riippumatta) kehittivät *epäeuklidisen geometrian*, jonka systeemissä yhdensuuntaisuusaksiomi vaihdetaan loogiseksi antiteesikseen (suoran L ulkopuolella olevan pisteen P kautta kulkee vähintään kaksi suoran L suuntaista tason suoraa).

Epäeuklidiseen geometriaan johtivat siis vuosisatoja jatkuneet itsepintaiset yritykset paralleelilauseen A_0 vastakohdan, antiteesin $\bar{A}_0$ ristiriitaisuuden todistamiseksi. Epäsuoraa päättelyä käyttämällä odotettiin, että $\bar{A}_0$:sta ynnä muista Eukleideen aksiomeista (A_1) lopulta johduttaisiin loogiseen ristiriitaan. Yhä uusia seurauslauseita todistettiin, jotka samoin kuin antiteesi $\bar{A}_0$, poikkesivat Eukleideen järjestelmän vastaavista lauseista, mutta odotettu looginen ristiriita jäi tulematta. Niin Bolyai ja Lobatschewski päättelivät, että epäeuklidinen järjestelmä (jonka pohjan euklidiset aksiomit (A_1) ynnä paralleelilauseen antiteesi $\bar{A}_0$ muodostavat) on loogiselta kannalta yhtä virheetön kuin klassinen Eukleideen geometria.

Nämä merkittävät oivallukset eivät kuitenkaan lopullisesti ratkaisseet yhdensuuntaisuusaksiomin riippumattomuuskysymystä. Kuten edellä jo on korostettu, tällaisten loogisten kysymysten luonteeseen kuuluu, että niiden selvittämiseksi on *poistuttava* annetusta, tutkittavasta järjestelmästä (A) ja konstruoitava sitä vastaava »kuva» eli »malli» joidenkin muiden järjestelmien piiristä. Myöhemmin palaamme tämän periaatteen mukaisesti erityisesti paralleeliaksiomiin.

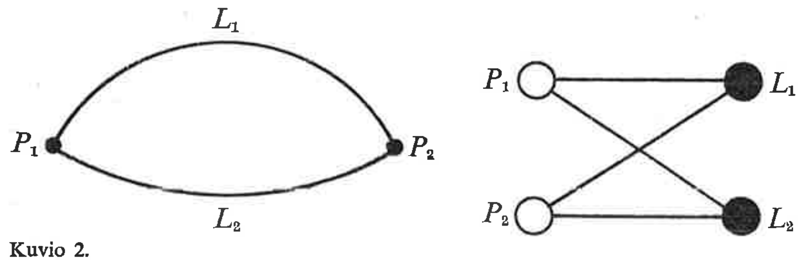
Näiden periaatteellisten huomautusten jälkeen jatkamme kolmen aksiomin I. 1—3 muodostaman yksinkertaisen järjestelmän loogista tarkastelua.

1.6. Aksiomien I. 1—3 riippumattomuus

Tämä kysymys selvitetään, kuten vastaava *ristiriidattomuus-* eli *konsistenssiongelma*, käyttämällä finiittisiä mallijärjestelmiä. Alla oleva taulukko sisältää tällaisen yksinkertaisen mallin.

$$\begin{cases} \text{Pisteet:} & P_1, P_2\ (P_1 \neq P_2), \\ \text{Suorat:} & L_1, L_2\ (L_1 \neq L_2), \\ \text{Insidenssi:} & P_1 - L_1, P_1 - L_2, P_2 - L_1, P_2 - L_2. \end{cases}$$

Tässä kahden pisteen ja kahden suoran muodostamassa mallissa aksiomit I. 1 ja I. 2 pätevät, aksiomi I. 3 sitä vastoin ei siinä toteudu. Samaa mallia vastaavat isomorfit kuviot:



Kuvio 2.

Näistä malleista selviää, että aksiomi I. 3 on loogisesti riippumaton aksiomeista I. 1 ja I. 2.

1.7. Lisää yhdensuuntaisuusopista

Luonnollisen geometrisen näkemyksemme mukaan kahden suoran yhdensuuntaisuuteen liittyy tietty havannollinen, meille kaikille hyvin tunnettu »hahmo». Se ei kuitenkaan sisällä mitään oleellista uutta loogista suoran käsitteen piirrettä, sillä »yhdensuuntaisuus» voidaan *määritellä* insidenssisuhteen avulla:

Kahta suoraa sanotaan yhdensuuntaisiksi, jos ei mikään piste ole insidentti molempien suorien kanssa.

Paralleelilause voidaan siis täsmällisesti lausua näin:

1) Olkoon $P \not\!- L$. Niiden suorien joukossa, jotka ovat insidenttejä P:n kanssa, on täsmälleen *yksi*, L', joka ei ole insidentti L-suoran minkään pisteen kanssa.

Paralleeliaksiomin vastalause, antiteesi käsittää seuraavat mahdollisuudet:

2) Jos $P \not- L$, on vähintään *kaksi* suoraa, $L' \neq L''$, jotka ovat insidenttejä P:n kanssa, mutta jotka eivät kohtaa L-suoraa, so. ei ole pistettä P' ($P' — L$, $P' — L'$) eikä pistettä P'' ($P'' — L$, $P'' — L''$).

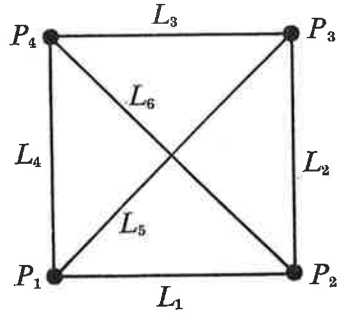
3) Kahdella suoralla on *aina* yhteinen piste.

Nämä kolme lausetta, joista ensimmäinen on voimassa euklidisessa tasossa, toinen epäeuklidisessa tasossa ja kolmas projektiivissa tasossa (vrt. luku III), ovat riippumattomia aksiomijärjestelmästä I. 1—3. Tämä ilmenee mallista *M (tapaus 3)* ja alla olevista kuvioista 3 ja 4, missä insidenssisuhde on tulkittava »luonnollisen» geometrisen havainnon mukaan.

4 *pistettä*, 6 *suoraa (tapaus 1)*

$P_1 — L_1, L_4, L_5$
$P_2 — L_1, L_2, L_6$
$P_3 — L_2, L_3, L_5$
$P_4 — L_3, L_4, L_6$

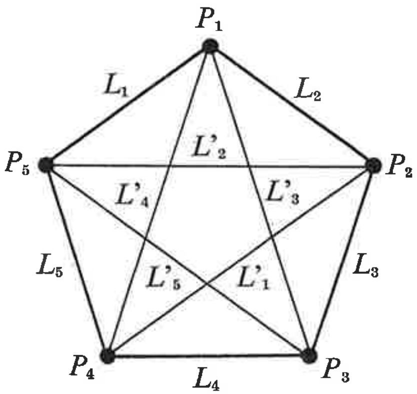
eli



Kuvio 3.

5 *pistettä*, 10 *suoraa (tapaus 2)*

$P_1 — L_1, L_3', L_4', L_2$
$P_2 — L_2, L_2', L_1', L_3$
$P_3 — L_3, L_5', L_3', L_4$
$P_4 — L_4, L_1', L_4', L_5$
$P_5 — L_5, L_2', L_5', L_1$



Kuvio 4.

1.8. Seuraavan tutkimuksen ohjelma

Sen jälkeen kun järjestelmän I. 1—3 aksiomien keskinäinen ristiriidattomuus ja riippumattomuus nyt on ilmennyt, on tilanne tämä:

Olkoon (S) niiden, peruskäsitteiden (piste, suora, insidenssi) piirissä mielekkäiden lausumien joukko, jotka siis sanovat jotakin näistä ja vain näistä peruskäsitteistä. Nämä lausumat jakaantuvat kolmeen ryhmään:

1) Aksiomijärjestelmästä I. 1—3 loogisesti johdettavat lauseet (S_1) (ne sisältävät aksiomit 1—3). Nimitämme niitä *oikeiksi lauseiksi*;

2) Lauseiden (S_1) antiteesit $(\bar{S}_1)$. Näitä nimitämme *vääriksi* lausumiksi;

3) Aksiomeista I. 1—3 loogisesti *riippumattomat* lausumat (S_2). Näiden antiteesit $(\bar{S}_2)$ ovat samoin riippumattomia. Lausumat (S_2) ja $(\bar{S}_2)$ eivät ole oikeita eivätkä myöskään vääriä.

Jos joukko 3) on tyhjä, aksiomijärjestelmä on *täydellinen*. Systeemi I. 1—3 ei täytä tätä täydellisyyden ehtoa. Niinpä esimerkiksi paralleelilause on riippumaton kolmesta aksiomista I. 1, 2, 3. (vrt kuviot 3 ja 4)

Jos jokin ristiriidaton ja riippumaton aksiomijärjestelmä (A) ei ole täydellinen, ja jos T_0 on siitä riippumaton lausuma, järjestelmää voidaan täydentää ottamalla T_0 uudeksi lisäaksiomiksi. Laajennettu systeemi (A, T_0) edelleen täyttää ristiriidattomuuden ja riippumattomuuden vaatimukset. T_0:n asemesta voitaisiin myös sen vastalause (antiteesi) $\bar{T}_0$ valita lisäaksiomiksi.

Insidenssijärjestelmä I. 1—3 voidaan niin muodoin täydentää lisäämällä siihen yksi kolmesta paralleelilauseista 1), 2), 3) uudeksi, neljänneksi aksiomiksi. Pyrkimyksenämme on rakentaa *euklidinen* geometria, ja sen vuoksi jäämme ensimmäisen vaihtoehdon 1), paralleeliaksiomin kannalle.

Ennen kuin tämä täydennys suoritetaan, on kuitenkin syytä laajentaa järjestelmää I. 1—3 toiseen suuntaan, ottamalla käytäntöön uusi perussuhde: *järjestyksen relaatio*.

§ 2. Suoran pisteiden järjestys

2.1. Pisteiden järjestys

Luonnollisessa geometrisessa havainnossamme esiintyy eräitä piirteitä, joita ei voi loogisesti palauttaa edellä puheena olleeseen insidenssisuhteeseen. Suoran pisteet seuraavat toisiaan tietyssä järjestyksessä (»vasemmalta oikeaan» tai päinvastoin »oikealta vasempaan»), piste jakaa suoran kahteen »puolisäteeseen», suora jakaa sen ulkopuolella olevat tason pisteet kahteen »puolitasoon», jne.

Selvittääksemme tällaiset alkeisgeometrian piirteet on välttämätöntä ottaa käytäntöön uusi perussuhde: *järjestyksen suhde*. Tähän tulokseen johti 19. vuosisadan geometrian perustutkimus. Tässä yhteydessä on ensi sijassa mainittava PASCH ja HILBERT, joka kuuluisassa teoksessaan »Grundlagen der Geometrie» viime vuosisadanvaihteessa selvitti geometrian loogisen rakenteen ja samalla loi perustan ns. *aksiomatiikan metodille*, joka mullistavasti on vaikuttanut koko matematiikan kehitykseen vuosisadallamme (vrt. Johdanto).

Vähemmän tunnettua näyttää matemaatikkojenkin keskuudessa olevan, että jo GAUSS selvästi oivalsi, että järjestyksen suhde on postuloitava insidenssin käsitteestä riippumattomana alkeisgeometrian perussuhteena.

»Järjestyksen» käsitteen pohjaksi on Gaussin ja Hilbertin mukaan sopiva valita suhde »välissä». Insidenssijärjestelmä täydennetään seuraavalla uudella perusolettamuksella:

II. Järjestyksen perussuhde. *Jokaista pisteparia A, B ($A \neq B$) vastaa tietty pistejoukko (X) ($X \neq A$ ja $X \neq B$).*

Pisteiden X sanotaan olevan pisteiden A ja B »välissä», ja merkitään tämä: AXB tai BXA. X-merkki kirjoitetaan siis A:n ja B:n väliin, vastaten »välissä olemiseen» liittyvää geometrista havaintoa. Tämä välissäkäsitteen luonnollinen »hahmo» johdattaa *loogisen* järjestyskäsitteen muodostamiseen, mutta se ei tämän käsitteen tulkitsemisen kannalta ole *oleellinen*. Loogiselta kannalta järjestyksen käsitteeseen ei aluksi ole liitettävä muuta kuin mitä perusolettamuksessa II on sanottu.[1]

---

[1] Suuremman yhtenäisyyden saavuttamiseksi voisi sallia, että »välissä» olevien pisteiden (X) joukko käsittäisi myös pisteet A ja B.

2.2. Järjestyksen aksiomit II. 1—3

Asetamme nyt eräitä järjestyksen perussuhdetta rajoittavia *sääntöjä*:

Aksiomi II. 1. *Jos ABC (tai, mikä merkitsee samaa, CBA), niin pisteet A, B, C ovat samalla suoralla.*

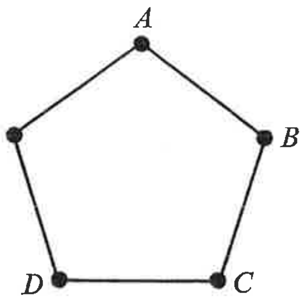
Aksiomi II. 2. *Annetun suoran kolmesta pisteestä täsmälleen yksi on molempien muiden välissä.*

Aksiomi II. 3. *Olkoot pisteet A* ja *B annettuja ($A \neq B$). Silloin on kolme muuta pistettä C, D, E, siten että ACB, ABD ja EAB.*

Näistä aksiomeista seuraa heti

Lause 2. 1. *Jokaisella suoralla on vähintään viisi eri pistettä.*

Enempää ei voidakaan sanoa suoralla olevien pisteiden lukumäärästä. Tämä todetaan finiittisen mallin avulla, missä suoralla on täsmälleen viisi pistettä A, B, C, D, E, joiden järjestys on annettu siten, että aksiomit II. 1—3 ovat voimassa. Tällainen järjestelmä on esitetty alla olevassa kuviossa:



Kuvio 5.

Kuviossa on tällöin sovittava siitä, että kärkipiste (esim. A) on niiden kärkipisteiden »välissä», jotka joko molemmat ovat sen »naapureita» tai joilla ei kummallakaan ole tätä ominaisuutta (A on E:n ja B:n ja samoin D:n ja C:n välissä jne.).

Jos lisäksi insidenssiaksiomit I. 1—3 otetaan huomioon, kuudesta aksiomista I. 1—3, II. 1—3 seuraa

Lause 2. 2. *On vähintään* 21 *suoraa ja* 21 *pistettä.*

T o d i s t u s. Olkoon O piste ja L_1 suora sekä $O — L_1$. O:n kautta kulkee suora $L_2 \neq L_1$ (I. 2). Suoralla L_1 on neljä muuta pistettä A_1, A_2,

A_3, A_4 ja suoralla L_2 pisteet O, B_1, B_2, B_3, B_4 (lause 2. 1) Suorat $A_\mu B_\nu$ ($\mu = 1, \ldots, 4$; $\nu = 1, \ldots, 4$) ovat kaikki erillisiä. Sillä jos esim. $A_1 B_1 = A_2 B_2$, olisi $B_2 — A_1 B_1$ ja siis $A_1 — L_2$, mistä seuraisi ristiriita $L_1 = L_2$ (I. 3).

Suoralla $A_1 B_1$ on vielä kolme muuta pistettä C_1, C_2, C_3 (lause 2. 1), jotka eivät yhdy pisteisiin O, A_μ, B_ν, koska $A_1 B_1 \neq L_1$ ja $A_1 B_1 \neq L_2$ (I. 3). Sen vuoksi suorat OC_1, OC_2, OC_3 ovat erillisiä edellä mainituista suorista. Siten olemme löytäneet: 2 suoraa L_1, L_2, 16 suoraa $A_\mu B_\nu$, 3 suoraa OC_ν, eli yhteensä 21 suoraa.

Jokaisella suoralla $A_1 B_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, 4$) on kolme pistettä (C), jotka eivät yhdy mihinkään pisteeseen O, A_μ, B_ν ($\mu = 1, \ldots, 4$; $\nu = 1, \ldots, 4$). Näitä pisteitä (C) on $4 \cdot 3 = 12$. Niiden lisäksi on vielä yhdeksän pistettä O, A_μ, B_ν ($\mu = 1, \ldots, 4$; $\nu = 1, \ldots, 4$). Pisteitä on siis kaikkiaan vähintään 21.

2.3. Järjestelmän I. 1—3, II. 1—3 ristiriidattomuus

Tämän osoitamme jälleen äärellisellä mallilla, missä kaikki kuusi aksiomia on toteutettu. Malli, minkä GUSTAF JÄRNEFELT on minulle osoittanut, sisältää pienimmän määrän perusalkioita, nimittäin täsmälleen 21 pistettä ja 21 suoraa:

Olkoon pisteiden A_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, 21$) ja suorien L_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, 21$) joukoissa insidenssin ja järjestyksen suhteet annettu seuraavalla tavalla:

I. Insidenssi. Suora L_μ on insidentti pisteiden A_μ, $A_{\mu+1}$, $A_{\mu+6}$, $A_{\mu+8}$, $A_{\mu+12}$ ($\mu = 1, 2, \ldots$, modulo 21) kanssa.

II. Järjestyksen suhde on kullakin suoralla annettu kuten kuvio 5 osoittaa.

Todetaan, että kaikki aksiomit I. 1—3, II. 1—3 tällöin pätevät, ja tämä aksiomijärjestelmä on siis ristiriidaton.

Vielä olisi tutkittava, ovatko järjestyksen aksiomit II. 1—3 toisistaan riippumattomia. Tämä ominaisuus on niin ilmeinen, että emme siihen puutu.

Että kuuden aksiomin I. 1—3, II. 1—3 muodostama järjestelmä ei vielä ole *täydellinen*, tulee osoitettavaksi myöhemmin.

2.4. Paschin aksiomi

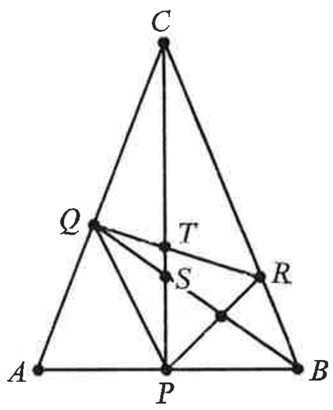
Luonnollisen näkemyksemme mukaan suora L, joka leikkaa kolmion ABC sivun AB (A:n ja B:n välissä), välttämättömästi leikkaa joko sivun BC (B:n ja C:n välissä) tai sivun AC (A:n ja C:n välissä), mikäli se ei kulje C-pisteen kautta. Tämä lause voidaan insidenssi- ja järjestyksensuhteen avulla lausua seuraavalla tavalla:

Aksiomi II. 4 (Paschin aksiomi). *Olkoot A, B, C kolme pistettä, jotka eivät sijaitse samalla suoralla, ja L suora, joka ei ole insidentti niiden kanssa. Jos L-suoralla on piste P pisteiden A ja B välissä (APB), suora L sisältää pisteen Q, joka täyttää ehdon AQC tai ehdon BQC.*

Viimeisen lauseen sana »tai» on tässä käsitettävä logiikan inklusiivikäsitteen mukaisesti. »Tai» -sana ei siis tässä vaiheessa sulje pois mahdollisuutta, että L-suora kohtaa *sekä* sivun AC pisteiden A ja C välissä *että* sivun BC pisteiden B ja C välissä. Mutta edellä asetetusta *aksiomista* II. 4 seuraa, että toinen näistä vaihtoehdoista on suljettava pois. Todistamme:

Korollaario II. 4'. *Aksiomin* II. 4 *oletuksilla suora L kohtaa joko sivun AC tai sivun BC.*

Todistusta varten riittää osoittaa, että kuusi suhdetta APB, AQC, BRC, $P—L$, $Q—L$, $R—L$ (kuvio 6) eivät yhtaikaa voi olla voimassa. Olettakaamme hetkeksi, että nämä suhteet vallitsevat. Soveltamalla aksiomia II. 4 kolmioon ABQ ja suoraan CP seuraa, että BQ:n ja



Kuvio 6.

CP:n leikkauspiste S on pisteiden Q ja B välissä. Edelleen seuraa tästä aksiomista, kun se sovelletaan kolmioon BQR ja suoraan CP, että suhde QTR vallitsee. Koska suorilla CP ja L ei voi olla useampia kuin yksi yhteinen piste, on $T = P$ ja siis QPR. Vastaavalla tavalla näytetään, että PRQ ja RQP, mikä sotii aksiomia II. 2 vastaan.

Lause II. 4′ on siten todistettu.

2.5 Paschin aksiomin looginen asema

Järnefeltin mallin 2. 3 avulla päätellään, että Paschin aksiomi ei seuraa aksiomeista I. 1—3, II. 1—3. Sillä mallissa nämä kuusi aksiomia toteutuu, jota vastoin Paschin aksiomi ei siinä vallitse. Sen mukaan, mitä luvussa 1. on esitetty, jää siis vain kaksi mahdollisuutta: Joko lause II. 4 on ristiriidassa aksiomien I. 1—3, II. 1—3 kanssa tai se on näistä aksiomeista loogisesti riippumaton.

Myöhemmin tulemme osoittamaan, että *jälkimmäinen* ehto on voimassa. Tästä seuraa, että järjestelmä I. 1—3, II. 1—3 ei vielä ole täydellinen. Riippumaton lause II. 4 voidaan hyväksyä uudeksi aksiomiksi, ja laajennettu järjestelmä I. 1—3, II. 1—4 jää edelleenkin ristiriidattomaksi.

2.6. Paschin aksiomin seurauksia

Aksiomien II. 1—4 avulla voidaan *neljän* samalla suoralla olevan pisteen järjestyksen suhteen todistaa neljä lausetta, jotka vastaavat luonnollista näkemystämme:

Lause 2. 3. Jos ABC ja ACD, niin ABD ja BCD.

Lause 2. 4. Jos ABC ja BCD, niin on ACD ja ABD.

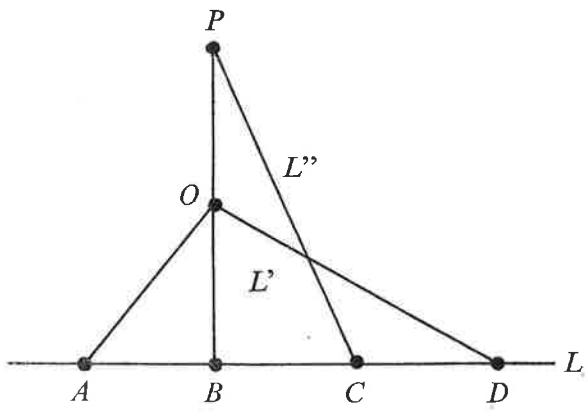
Lause 2. 5. Jos ABC ja ABD, niin ei ole CAD eikä CBD.

Lause 2. 6. Jos ABD ja ACD, niin ei ole CAD eikä CDB.

Nämä neljä lausetta, joita seuraavassa nimitämme *järjestyksen peruslauseiksi*, sisältävät kaiken, mitä neljän suoralla olevan pisteen järjestyksestä toistaiseksi voidaan sanoa.

Esimerkkinä todistamme lauseen 2. 3:

Suhteista ABC ja ACD seuraa BCD.



Kuvio 7.

T o d i s t u s . Olkoot A ja B suoralla L (I. 3) ja olkoon L' ($\neq L$) toinen suora, L'—B (I. 2). Suoralla L' on piste $O \neq B$ (I. 1). Olkoon P—L' ja BOP (II. 3). Piste P ei yhdy pisteisiin O, A, B, C, D. C:n ja P:n kautta kulkeva suora L'' ei insidoi pisteiden O, A, D kanssa (I. 3). Soveltamalla Paschin aksiomia tähän suoraan ja kolmioon OAD seuraa, että L'' sisältää pisteen X, siten että joko OXD tai OXA. Jälkimmäinen suhde ei ole mahdollinen. Sillä jos olisi OXA, voitaisiin Paschin aksiomia soveltaa kolmioon OAB ja suoraan L''. Tämä suora leikkaisi joko suoran L' pisteiden O ja B välissä tai suoran L pisteiden A ja B välissä. Molemmat vaihtoehdot johtavat ristiriitaan. Sillä L'' leikkaa suoran L' pisteessä P, ja konstruktion mukaan on POB. Ja L:n ja L'':n leikkauspiste C täyttää olettamuksen mukaan ehdon ABC. Antiteesi OXA on ristiriitaisena hylättävä, ja siis on OXD. Soveltamalla uudelleen Paschin aksiomia, tällä kertaa kolmioon OBD ja suoraan L'', päätellään, että on joko OPB tai BCD. Konstruktiomme mukaan on kuitenkin BOP, ja siitä seuraa väitös BCD.

Samaan tapaan todistetaan muut lauseet 2. 3—6.

2.7. Äärimmäiset pisteet

Yllä todistetun neljän järjestyksen peruslauseen avulla jatkamme nyt suoralla olevien pisteiden järjestyksen tutkimista.

Lause 2.7. Suoralla L olkoon annettuna $n \geqq 3$ eri pistettä (P). Niiden joukossa on kaksi täysin määrättyä »äärimmäistä» pistettä A ja B, joiden välissä kaikki muut pisteet ovat. Äärimmäiset pisteet A, B sitä vastoin eivät sijaitse kahden pisteen P välissä.

Todistus. Lause pätee ilmeisesti, kun $n = 3$. Oletamme, että lause on oikea kun lukumäärä on n ($\geqq 3$), ja todistamme sen arvolla $n + 1$.

Olkoot P_1 ja P_n äärimmäiset pisteistä $P_1, \ldots P_n$. Jos suoralla L annetun pistejoukon lisäksi on $(n + 1)$: s piste P_{n+1}, on kolme vaihtoehtoa:

1) $P_1 P_{n+1} P_n$. Silloin P_1 ja P_n ovat äärimmäiset pisteistä $P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}$.

Ensiksi on näet induktio-oletuksen mukaan $P_1 P_\nu P_n$ arvoilla $\nu = 2, \ldots, n - 1$, ja arvolla $\nu = n + 1$ on samoin $P_1 P_\nu P_n$ (oletus 1). On siis vain osoitettava: P_1 ja P_n eivät ole pisteiden P_ν ($\nu = 2, \ldots, n - 1$) ja P_{n+1} välissä. Jos niin olisi seuraisi siitä sekä oletuksesta 1) lauseen 2. 4 nojalla (missä $A = P_n$, $B = P_{n+1}$, $C = P_1$, $D = P_\nu$), että $P_n P_1 P_\nu$, vastoin induktio-oletusta. — Samoin osoitetaan, että suhteet $P_\nu P_n P_{n+1}$ ($\nu = 2, \ldots, n - 1$) johtavat ristiriitaan. Siis P_1 ja P_n ovat joukon P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n, n + 1$) äärimmäiset pisteet.

2) $P_1 P_n P_{n+1}$. Samoin kuin edellä osoitetaan, että P_1 ja P_{n+1} tällöin ovat joukon $P_1, \ldots, P_{n+1}$ äärimmäiset pisteet.

3) $P_n P_1 P_{n+1}$. Kuten yllä todistetaan, että P_n ja P_{n+1} ovat pistejoukon $P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}$ äärimmäisinä pisteinä.

Lause 2.8. Jos pistejoukko (P) sisältää n ($\geqq 3$) pistettä, niin nämä voidaan numeroida: $P_1, P_2, \ldots, P_n$, siten että $P_i P_j P_k$ pätee täsmälleen silloin, kun joko $i < j < k$ tai $i > j > k$.

Tällaisia »luonnollisia» järjestyksiä on siis vain kaksi; ne saadaan toisistaan transpositiolla $(i, n - i)$ (pisteet luetellaan joko »vasemmalta oikeaan» tai päinvastoin »oikealta vasempaan»).

K.o. järjestys saadaan seuraavalla tavalla. Olkoot P_1 ja P_n annetun pistejoukon äärimmäiset pisteet, jäljellä olevista pisteistä P_2 ja P_{n-1} äärimmäiset Näin jatkamalla saadaan jono $P_1, \ldots, P_n$, joka täyttää vaaditut ehdot.

2.8. Suoran pisteiden lukumäärä

Todistetaan nyt:

Lause 2. 9. *Jokaisella suoralla on äärettömän monta pistettä.*

Osoitamme, että jos $P_\nu — L$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, on piste $P_{n+1} \neq P_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, siten että $P_{n+1} — L$. Olkoot P_1 ja P_n joukon (P_ν) $(\nu = 1, \ldots, n)$ äärimmäiset pisteet. Lauseen 2. 3 mukaan on silloin piste $P = P_{n+1}$, siten että $P_1 P_n P_{n+1}$ ja $P_{n+1} \neq P_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. Tämän jälkeen lause 2. 9 osoitetaan yleistä induktiota käyttämällä.

Helposti seuraa lauseesta 2. 9, että myös *suorien* joukko on ääretön.

§ 3. Aksiomijärjestelmän I. 1—3, II. 1—4 ristiriidattomuus ja epätäydellisyys

3.1. Ristiriidattomuus

Edellä todistettiin jo (2.5), että Paschin aksiomi II. 4 joko on ristiriidassa aksiomien I. 1—3, II. 1—3 kanssa tai että se on riippumaton niistä.

Osoitamme nyt, että ensimmäinen vaihtoehto poistuu: järjestelmä S: I. 1—3, II. 1—4 on ristiriidaton. Koska tätä aksiomisysteemia lauseen 2. 9 mukaan ei voi toteuttaa äärellisellä määrällä perusalkioita, ei ristiriidattomuuttakaan nyt voi todistaa finiittisen mallin avulla, joka sisältää vain äärellisen joukon pisteitä ja suoria. Todistusta varten on siis turvauduttava malleihin M, jotka sisältävät äärettömän monta pistettä ja suoraa ja esiintyvät osajärjestelminä joissakin systeemeissä T, joiden *ristiriidattomuus joko on selvitetty tai oletetaan.* Jos aksiomien I. 1—3, II. 1—4 tällaisessa mallissa M toteutuvat, päätellään siitä kuten aikaisemminkin (jolloin tultiin toimeen finiittisillä apujärjestelmillä), että aksiomit I. 1—3, II. 1—4 eivät sisällä keskinäistä ristiriitaa.

Etsittäessä apujärjestelmää T ja M tulevat *aritmetiikan* järjestelmät ensi sijassa kysymykseen. Tällöin on oletettava, että aritmetiikka itse on ristiriidaton järjestelmä.[1]

3.2. Aritmeettinen malli

Tulkitsemme geometriset peruskäsitteet aritmeettisesti, kuten *analyyttisessa geometriassa* tapahtuu (malli M_1):

1) Kahden reaaliluvun järjestetty pari (x, y) on »piste».

2) Kolmen reaaliluvun järjestetty kolmikko (a, b, c) on »suora», edellyttäen, että $a^2 + b^2 > 0$.

Kahta pistettä $P_1\,(x_1, y_1)$ ja $P_2\,(x_2, y_2)$ katsotaan identtisiksi silloin ja vain silloin, kun $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, kahta suoraa $L_1\,(a_1, b_1, c_1)$ ja $L_2\,(a_2, b_2, c_2)$, kun $a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$.

3) Piste (x, y) ja suora (a, b, c) tulkitaan »insidenteiksi», jos $ax + by + c = 0$.

4) Piste (x, y) on pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) »välissä», jos ensiksikin determinantti

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ja toiseksi *luvut* x (ja y) ovat suuruudeltaan lukujen x_1 ja x_2 (y_1 ja y_2) välissä.

Nyt järjestelmän S (I. 1—3, II. 1—4) jokaista mielekästä lausumaa vastaa täysin määrätty analyyttisen geometrian lausuma S', joka siinä joko on väärä tai oikea. Todetaan heti, että aksiomien I. 1—3, II. 1—4 seitsemän »kuvalausetta» järjestelmässä S' ovat aritmetiikan *oikeita* lauseita. Jos siis aksiomeista S voitaisiin johtaa ristiriita, tämä käytettyjä päättelyketjuja seuratessa ilmenisi aritmeettisen järjestelmän S' vastaavien lauseiden ristiriitana, mikä kuitenkin aritmetiikan oletetun ristiriidattomuuden vuoksi on mahdotonta.

Aritmeettinen malli M_2. Se on sama kuin M_1, sillä rajoituksella, että luvut x, y, a, b, c nyt oletetaan *rationaalisiksi.*

---

[1] Tätä tosin ei tähän mennessä vielä ole täysin selvitetty. Meidän on siis tyydyttävä osoittamaan järjestelmän I. 1—3, II. 1—4 ristiriidattomuus olettamalla, että aritmetiikka tyydyttää mainitun loogisen ehdon.

Toisaalta malleista M_1 ja M_2, toisaalta finiittisestä mallista M' (kuvio 5) seuraa, että Paschin aksiomi II. 4 on *riippumaton* muista aksiomeista I. 1—3, II. 1—3. Sillä viimeksi mainitut 6 aksiomia toteutuvat sekä mallissa M' että malleissa M_1 ja M_2, jota vastoin Paschin aksiomi pätee vain järjestelmissä M_1 ja M_2, mutta se ei päde järjestelmässä M'.

Riippumaton lause II. 4 (Pasch) voidaan siis loukkaamatta ristiriidattomuuden vaatimusta lisätä järjestelmän (I. 1—3, II. 1—3) lisäaksiomiksi.

Lopuksi huomautettakoon, että mallien M_1 ja M_2 asemesta olisimme edellisissä tarkasteluissa voineet käyttää olla olevia aritmeettisia järjestelmiä:

M_3: Sama kuin M_1, siten muutettuna, että »pisteen» $P(x, y)$ tulkinta rajoitetaan ehdolla $x^2 + y^2 < 1$.

M_4: Sama kuin M_2, jälleen rajoittamalla »pisteet» $P(x, y)$ ehdolla $x^2 + y^2 < 1$.

Jo tässä yhteydessä huomautamme, että seitsemän aksiomin I. 1—3, II. 1—4 muodostama järjestelmä *ei vielä ole täydellinen*. Esimerkiksi paralleelilause on näistä aksiomeista *riippumaton*.

Tämä nähdään malleista M_1 ja M_3, joissa seitsemän aksiomia I. 1—3, II. 1—4 toteutuvat. Sitä vastoin paralleelilause toteutuu M_1:ssä, mutta se ei pidä paikkaansa mallissa M_3.

Ennen kuin siirrymme järjestelmän I. 1—3, II. 1—4 laajentamiseen, johdamme siitä eräitä tärkeitä seurauslauseita.

§ 4. Puolisäde, puolitaso, kulma, kolmio

4.1. Puolisäde

Pisteet O ja P ($\neq O$) olkoot suoralla L. Jaamme pisteiden $X — L$ ($X \neq O$) joukon (X) kahteen luokkaan: Luokka (I) sisältäköön kaikki pisteet X, joilla XOP. Kaikki muut pisteet $X — L$ ($X \neq O$) muodostavat luokan (II). Todistetaan:

Lause 4. 1. *Välttämätöntä ja riittävää, jotta kaksi pistettä P_1, P_2 ($P_1 \neq O$, $P_2 \neq O$) kuuluvat eri luokkiin, on että P_1OP_2.*

Todistus. Olkoon $P_1 \in$ (I), $P_2 \in$ (II). Jos $P_2 = P$, on luokan (I) määritelmän mukaan P_1OP_2. Olkoon nyt $P_2 \neq P$. Silloin on joko PP_2O tai OPP_2. Edellisessä tapauksessa (PP_2O) seuraa suhteesta POP_1 (so. luokan (I) määritelmästä), että P_2OP_1 (järjestyksen peruslauseet, kohta 2. 6). Jos taas OPP_2, niin samat peruslauseet osoittavat, että suhteista P_2PO ja POP_1 seuraa P_2OP_1. Ehdon P_1OP_2 välttämättömyys on siten todistettu.

Oletamme tämän jälkeen kääntäen, että suhde P_1OP_2 vallitsee, ja osoitamme, että tällöin P_1 ja P_2 kuuluvat *eri* luokkiin.

Olettakaamme, että $P_1 \in$ (I), so. P_1OP. Silloin olettamuksesta P_1OP_2 ja peruslauseista 2. 6 päätämme, että suhde P_2OP ei päde, joten $P_2 \in$ (II).

Jos taas $P_1 \in$ (II) ja erityisesti $P_1 = P$, on olettamuksen P_1OP_2 mukaan POP_2, joten $P_2 \in$ (I).

Olkoon nyt $P_1 \neq P$, $P_1 \in$ (II). Tällöin on joko OP_1P tai OPP_1. Edellisessä tapauksessa peruslauseista 2. 6 ja olettamuksesta P_1OP_2 seuraa, että POP_2, joten $P_2 \in$ (I). Jos sitä vastoin P_1PO, niin oletuksesta P_1OP_2 ja lauseista 2. 6 päätämme, että POP_2. Tämä sisältää väitöksen: $P_2 \in$ (I).

Edelleen saadaan

Lause 4. 2. *Jos P_1 ja P_2 kuuluvat samaan luokkaan, tämä luokka sisältää kaikki pisteet Q jotka ovat P_1:n ja P_2:n välissä.*

Todistus. Olkoot P_1 ja P_2 luokassa (I). Lauseen 4.1 mukaan on silloin joko P_2P_1O tai OP_2P_1. Jos P_2P_1O, seuraa suhteesta P_2QP_1 (lauseet 2. 6), että QP_1O. Koska $P_1 \in$ (I), on POP_1, joten POQ. Siis $Q \in$ (I).

Samalla tavoin todistetaan lause, jos P_1 ja P_2 kuuluvat luokkaan (II).

Luokkia (I) ja (II), joilla ei ole yhteisiä pisteitä, nimitetään *puolisäteiksi*. O-piste on niiden yhteinen *alkupiste*.

Kahden pisteen P_1 ja P_2 välissä olevien pisteiden P joukkoa (P_1PP_2) nimitetään *janaksi*. Pisteet P_1, P_2 ovat janan *päätepisteet*.

4.2. Puolitaso

Olkoon L suora ja P piste sen ulkopuolella. Muodostetaan jälleen kaksi luokkaa.

Luokka (I) koostuu pisteistä P_1, joita vastaa piste $X - L$, siten että PXP_1. Luokkaan (II) viedään kaikki muut pisteet $P_2 \not- L$ (siis erityisesti annettu piste P).

Lause 4.3. Jos P_1 ja P_2 kuuluvat eri luokkiin, on olemassa piste $Q - L$, siten että P_1QP_2.

Todistus. Olkoon esim. $P_1 \in$ (I). Väitös on ilmeinen, jos $P_2 = P$. Tapauksessa $P_2 \neq P$ oletamme ensin, että pisteet P_1, P, P_2 eivät ole samalla suoralla. Koska $P_1 \in$ (I), on olemassa piste $X - L$, P_1XP. Aksiomi II.4 (Pasch) sovellettuna kolmioon PP_1P_2 osoittaa, että on piste $Y - L$ niin että joko P_1YP_2 tai PYP_2. Jälkimmäisen vaihtoehdon olettamus $P_2 \in$ (II) sulkee pois, ja lause on siten todistettu. Jos P_1, P, P_2 ovat samalla suoralla, seuraa väitös järjestyksen peruslauseista (2.6).

Aksiomin II. 4 ja lauseen 4.3 avulla seuraa:

Lause 4.4. *Jos pisteet P_1 ja P_2 kuuluvat samaan luokkaan, sama pätee kaikkiin pisteisiin nähden, jotka ovat P_1:n ja P_2:n välissä.*

Edelleen vallitsee

Lause 4.5. *Luokkajako* (I), (II) *on riippumaton pisteen P ($\not- L$) valinnasta.*

Pistejoukkoja (I) ja (II) nimitetään *puolitasoiksi*. L on niiden yhteinen *rajasuora*. Lause 4. 4 sisältää sen, että *puolitaso on konveksi pistejoukko*.

4.3. Kulman käsite

Olkoot L_1 ja L_2 suoria jotka leikkaavat toisensa pisteessä O. Suora L_1 määrää kaksi puolitasoa A_1 ja A_2, suora L_2 puolitasot B_1 ja B_2

Leikkausjoukkoja $A_1 \cap B_1, A_1 \cap B_2, A_2 \cap B_2, A_2 \cap B_1$. nimitetään suorien L_1 ja L_2 muodostamiksi *kulmiksi*. Pisteen O määräämiä neljää leikkausjoukkoa $B_1 \cap L_1$, $A_1 \cap L_2$, $B_2 \cap L_1$, $A_2 \cap L_2$ sanotaan kulmien *kyljiksi*. Piste O on niiden yhteinen kärkipiste.

Lause 4. 6 *Kulma on konveksi pistejoukko.*

Tämä seuraa välittömästi puolitason konveksiudesta.

Sama pätee, jos kulmiin liitetään niitä rajoittavat kyljet (»suljettu» kulma).

Yllä olevasta neljästä kulmasta kahta sanotaan vieruskulmiksi, jos niillä on yhteinen kylki. Jokaisella kulmalla on kaksi *vieruskulmaa*. Neljäs kulma on ensiksi mainitun kulman *ristikulma*.

4.4. Kolmio

Kolme pistettä P_1, P_2, P_3, jotka eivät ole samalla suoralla, määräävät *kolmion*. Pisteet P_1, P_2, P_3 ovat sen *kärkipisteitä*, janat P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 sen *sivuja*. Sivujen yhdistejoukko muodostaa kolmion *reunan* (R).

Kulmien $P_1P_2P_3$, $P_2P_3P_1$, $P_3P_1P_2$ (joiden kärkinä P_2, P_3, P_1 ovat) *leikkausjoukko* muodostaa kolmion *sisäpuolen* I. Kulman konveksiudesta seuraa, että kolmion sisäpuoli myös on konveksi. Pisteet (A), jotka eivät ole kolmion sisäpuolella eivätkä sen reunalla, muodostavat kolmion *ulkopuolen*.

Helposti todistetaan, että pistejoukko (A) ei ole konveksi. Silti se on *yhtenäinen*: Jos A ja A' ovat kolmion ulkopisteitä, ne voidaan yhdistää murtoviivalla $(A =)P_0P_1 \ldots P_n(= A')$, jonka kaikki osajanat $P_{\nu-1}P_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ koostuvat ulkopisteistä (A).

Sisäpisteen I ja ulkopisteen A yhdistysjana sisältää täsmälleen yhden reunapisteen R.

4.5. Jordanin lause

Aksiomisysteemin I. 1—3, II. 1—4 avulla voidaan todistaa enemmänkin. Olkoon $R = P_1P_2 \ldots P_nP_1$ sulkeutuva murtoviiva, joka ei leikkaa itseään, so. janoilla P_1P_2, $P_2P_3 \ldots$, $P_{n-1}P_n$, P_nP_1 ei ole yhteisiä sisäpisteitä. Tällaiseen monikulmioon M nähden pitää paikkansa:

Jordanin lause. Monikulmio M jakaa tason pisteet $(\neq R)$ kahteen pistevieraaseen luokkaan (I) ja (A), jotka ovat yhtenäisiä. Reunapisteet M erottavat pisteet (I) ja (A) toisistaan, siten että jokainen jana IA sisältää ainakin yhden reunapisteen M.

Jos kolmion D reuna on M:n *sisäpisteiden* I muodostama, D:n sisäpisteet samoin ovat I-pisteitä. Sitä vastoin on kolmioita D, joiden reunat ovat M:n *ulkopisteitä* (A) ja joiden ulkopuoli samoin on (A)-joukon osajoukko.

Tämän lauseen todistus on helppo, jos murtoviiva M on konveksi, siten että jokaisen sivun $P_\nu P_{\nu+1}$ ($\nu = 1, \ldots, n-1$, $P_n = P_1$) määräämästä kahdesta puolitasosta vain toinen sisältää muut kärkipisteet P_μ. Tällöin sisäpuoli (I) myös on konveksi pistejoukko.

Jos reuna M ei täytä tätä konveksiusehtoa, todistus aksiomien I. 1—3, II. 1—4 avulla on vaikeampi (vrt. Greub [1]).

4.6. Topologiaa

Viimeksi puheena ollut Jordanin lause on luonteeltaan *topologinen*. Jatkamme hiukan aksiomisysteemin I. 1—3, II 1—4 puitteissa määriteltävien topologisten käsitteiden tarkastelua.

Olkoon P piste. Tällöin on olemassa kolmioita, jotka sisältävät P:n sisäpisteenä. Tällaisen kolmion sisäpuolta (I) nimitämme P-pisteen »*ympäristöksi*» U.[1]

Yllä todistetuista lauseista seuraa, että tämä ympäristön käsite tyydyttää *Hausdorffin lauseen.*

Kahdella pisteellä P_1 *ja* P_2 $(P_1 \neq P_2)$ *on ympäristöjä* U_1 *ja* U_2 *jotka pistevieraita (so. leikkausjoukko* $U_1 \cap U_2$ *on tyhjä).*

Todistus. Olkoon O piste, joka on P_1:n ja P_2:n välissä (P_1OP_2). Piste Q_1 valitaan mielivaltaisesti, niin että OP_1Q_1, ja piste Q_2 niin että OP_2Q_2. Puolitasoissa H_1 ja H_2, joita suora P_1P_2 rajoittaa, kiinnitetään mielivaltaiset pisteet $A \in H_1$, $B \in H_2$, niin että AOB. Silloin kolmion ABQ_1 sisäpuoli I_1 ja kolmion ABQ_2 sisäpuoli I_2 ovat P_1-pisteen ja P_2-pisteen pistevieraita ympäristöjä.

Sen jälkeen kun ympäristön käsite on määritelty, on äärettömän pistejoukon $\{P\}$ *kasautumispisteen* P_0 käsite selvä; P_0 on joukon $\{P\}$ kasautumispiste, jos jokainen P_0:n ympäristö U sisältää ainakin yhden pisteen $P \neq P_0$, joka kuuluu joukkoon $\{P\}$.

Kaikkien pisteiden P joukko (P) on »kaikkialla tiheä», jokainen piste $P = P_0$ on joukon (P) kasautumispiste. Sillä sisältäähän jokainen kolmio D, jonka sisällä P_0 on, äärettömän joukon sisäpisteitä P.

Näin määritellyssä topologiassa on myös äärettömän pistejonon P_n ($n = 1, 2, \ldots$) *konvergenssi* eli suppeneminen mielekäs käsite. Sa-

[1] Yleisemmin P:n ympäristöksi U voitaisiin ottaa konveksin monikulmion sisäpuoli (I) $(P \in I)$.

nomme, että $P = \lim_{n \to \infty} P_n$, jos U:n ollessa mielivaltainen P:n ympäristö on olemassa luku n_0, siten että $P_n \in U$, niin pian kuin $n > n_0$.

Hausdorffin lause takaa, että konvergentin pistejonon $P_1, \ldots, P_n, \ldots$ rajapiste $P = \lim P_n$ on *yksikäsitteisesti* määrätty.

§ 5. Dedekindin aksiomi

5.1. Suoran pisteiden leikkaus

Olettakaamme, että suoran L pisteet on jaettu kahteen luokkaan, (A) ja (B), niin että kahden samaan luokkaan kuuluvan pisteen välissä olevat pisteet jälleen kuuluvat tuohon samaan luokkaan. Jos luokat (A) ja (B) yhdessä käsittävät kaikki pisteet P — L, sanotaan luokkajakoa suoran L *leikkaukseksi*.

Tällaisia leikkauksia $(A)|(B)$ on. Jos näet piste O — L, niin O jakaa L:n pisteet kahteen puolisäteeseen (A) ja (B), ja liittämällä O-piste jompaankumpaan puolisäteeseen, esimerkiksi A-säteeseen, syntyy leikkaus $(A)|(B)$.

Olkoon nyt $(A)|(B)$ suoran L leikkaus. Luokan (A) pistettä A_0 nimitetään tämän luokan *äärimmäiseksi* pisteeksi, jos se ei sijaitse kahden muun A-pisteen välissä. Tästä määritelmästä seuraa järjestyksen aksiomien nojalla, että A-luokassa voi olla enintään *yksi* äärimmäinen piste A_0.

Samoin on (B)-luokan laita.

Yllä mainitussa esimerkissä O-piste on luokan (A) äärimmäinen piste. (B)-luokassa sitä vastoin ei ole äärimmäistä pistettä. Helposti nähdäänkin, ettei mielivaltaisen leikkauksen $(A)|(B)$ molemmissa luokissa voi olla äärimmäistä pistettä. Sillä jos A_0 ja B_0 olisivat sellaisia, olisi niiden välissä piste P (A_0PB_0). Tämä piste P ei voisi kuulua (A)-luokkaan eikä myöskään (B)-luokkaan, vastoin leikkauksen määritelmää. On siis vain kaksi vaihtoehtoa:

1) Leikkaus sisältää täsmälleen *yhden* äärimmäisen pisteen.

2) Leikkauksessa ei lainkaan esiinny äärimmäistä pistettä.

Kumpikaan näistä lausumista ei ole ristiriidassa aksiomijärjestelmän I. 1—3, II. 1—4 kanssa. Vaihtoehtoon 1) nähden tämä selviää yllä esitetystä puolisädettä koskevasta esimerkistä. Vaihtoehto 2) vuorostaan toteutuu aritmeettisessa tulkinnassa M_2, jos siinä, esim. suoralla $y = 0$, määritellään luokkajako:

(A) käsittää kaikki rationaalipisteet $x > 0$, $x^2 > 2$, ja (B) kaikki muut rationaalipisteet x. Siten saatu leikkaus $(A)|(B)$ ei sisällä äärimmäistä pistettä.

5.2. Dedekindin lause

Koska lausumat 1) ja 2) edellisen mukaan ovat *riippumattomia* aksiomeista I. 1—3, II. 1—4, voidaan jompikumpi niistä valita uudeksi aksiomiksi, järjestelmämme konsistenssin (ristiriidattomuuden) siitä kärsimättä. Koska pyrimme *euklidisen* geometrian suuntaan, valitsemme vaihtoehdon 1) uudeksi, kahdeksanneksi aksiomiksi:

Aksiomi II. 5. (Dedekindin lause). *Jokainen leikkaus sisältää äärimmäisen pisteen.*

Näin muodostetun, kahdeksan aksiomia sisältävän järjestelmän pohjalta voimme nyt siirtyä lähemmin tutkimaan *yhdensuuntaisten* suorien oppia.

§ 6. Yhdensuuntaisista suorista

6.1. Eräs luokkajako

Olkoon L suora ja sen ulkopuolella piste O ($O \not- L$). Onko olemassa suoraa L', joka kulkee O:n kautta ($O — L'$) *leikkaamatta* suoraa L (so. ei ole pistettä P, $P — L$, $P — L'$)?

Asetamme seuraavassa jälleen aksiomit I. 1—3, II. 1—5 ja tutkimme niiden avulla kuviota, joka konstruoidaan näin:

Olkoon piste $A — L$ sekä P piste, joka täyttää ehdon AOP. Olkoon edelleen L_1 suora, joka yhdistää pisteen P sekä L:llä olevan pisteen

$B \neq A$. Suoran L_1 pisteet X jaetaan kolmeen, keskenään pistevieraaseen luokkaan ((α), (β) ja (γ)) seuraavan ohjeen mukaan:

1) Jos suora OX kohtaa L-suoran pisteessä Y ja tällöin XOY, kuulukoon X luokkaan (α).

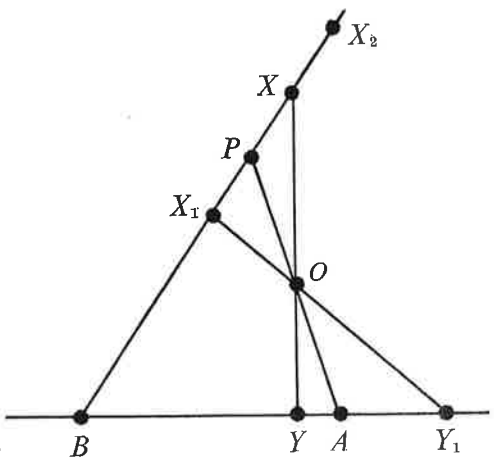
2) Jos suoran OX ja L-suoran leikkauspiste Y täyttää ehdon XYO tai ehdon YXO, viedään X-luokkaan (β); samoin piste $X = B$.

3) Ne pisteet X, joilla $OX \parallel L$, muodostavat luokan (γ).

(α)-luokka ei ole tyhjä, sillä ainakin P-piste kuuluu siihen. Sen lisäksi luokkaan (α) sisältyvät kaikki pisteet X, joilla XPB (kuvio 8). Sillä suora XO leikkaa kolmion ABP sivun PA pisteessä O (AOP). Paschin lauseen II. 4 mukaan suora XO leikkaa joko sivun BP taikka sivun AB. Ensiksi mainittu vaihtoehto on olettamuksen BPX mukaan mahdoton, ja XO leikkaa siis sivun AB pisteessä Y, siten että BYA.

Soveltamalla Paschin aksiomia kolmioon XYB ja suoraan PA päätämme olettamuksen XPB nojalla, että PA leikkaa joko sivun BY tai sivun XY. Mutta äsken todistettiin, että BYA, joten ainoaksi mahdollisuudeksi jää, että suoran L ja suoran OX leikkauspiste Y sijaitsee niin, että XOY. Piste X on siis, kuten väitettiin, α-piste.

(β)-luokka ei myöskään ole tyhjä. Siihen kuuluu ensinnä B-piste, ja lisäksi pisteiden X joukko, joilla on ominaisuus XBP. Sillä viimeksi mainitut pisteet X ja piste P ovat eri puolilla L-suoraa (ne eivät kuulu



Kuvio 8.

samaan L:n rajoittamista puolitasoista), ja koska O (AOP) on P:n määräämässä puolitasossa H, niin suorien L ja XO leikkauspiste Y toteuttaa ehdon XYO. Mutta tämä osoittaa, että $Y \in (\beta)$.

Selvittämättä on vielä, mihin luokkaan (α), (β), (γ) pisteiden P ja B välissä olevat pisteet X, PXB, kuuluvat.

6.2. Luokkien (α) ja (β) ominaisuuksia

Todistetaan tämän jälkeen:

Lause 6. 1. *Kahden α-pisteen X_1 ja X_2 väliset pisteet ovat samoin luokassa* (α).

Todistus. Yllä on jo osoitettu, että jokainen α-piste on samassa suoran L määräämässä puolitasossa H kuin piste P (tai myös piste O). Pisteitä X_1 ja X_2 yhdistävä suora leikkaa siis L-suoran pisteessä B, niin että joko BX_1X_2 tai BX_2X_1. Olkoon esimerkiksi BX_1X_2.

Olettamuksesta X_1XX_2 seuraa järjestyksen peruslauseiden (2.6) avulla, että BX_1X. Jos Paschin aksiomi II.4 sovelletaan kolmioon BX_1Y_1 ja suoraan OX, päätellään, että BYY_1 (sillä X_1OY_1). Kolmiossa BXY suora X_1Y_1 kohtaa sivun BX pisteessä X_1 (BX_1X). Koska BYY_1, seuraa Pashin aksiomista, että XOY. Piste X kuuluu siis luokkaan (α).

Lause 6.2. Saadaan edellisestä lauseesta, vaihtamalla α-luokka β-luokkaan.

Tämän lauseen todistamiseksi oletamme, että $X_1, X_2 \in (\beta)$. Jos nyt X_1XX_2, eikä X ole yllä mainitussa puolitasossa H, niin on (koska $O \in H$) XYO, ja X on siis β-piste, kuten väitettiin.

Jos sitä vastoin $X \in H$, niin on ainakin toinen pisteistä X_1, X_2 samoin H:n piste, sillä muuten janan X_1X_2 sisäpiste X olisi H:n »komplementissa», puolitasossa $\overline{H}$. Olkoon esim. $X_1 \in H$, ja siis joko $BX_1\ P$ tai BPX_1,. Kohdasta 6.1. seuraa, että X_1 (ollen β-piste) ei voi täyttää ehtoa BPX_1. Sen vuoksi on BX_1P.

Katsomme nyt pisteitä P, X_1, X_2. Järjestys X_1PX_2 on suljettava pois, sillä siitä ja yllä saadusta suhteesta BX_1P seuraisi BPX_2 (peruslauseet 2. 6), mikä kohdan 6.1 mukaan ei ole mahdollista.

Siis on joko PX_1X_2 tai PX_2X_1. Jos PX_1X_2, seuraa olettamuksesta

X_1XX_2, että PX_1X. Jos nyt X olisi α-piste, niin seuraisi lauseesta 6.1, että välipiste X_1 samoin olisi α-piste, vastoin oletusta.

Samaan ristiriitaan tullaan tapauksessa PX_2X_1, jos $X \in (\alpha)$. Siis on X joko β-piste taikka γ-piste (jolloin $OX \parallel L$).

Myös tämä viimeksi mainittu ominaisuus johtaa ristiriitaan. Jos näet X on γ-piste, ainakin toinen pisteistä X_1, X_2 (esim. X_1) toteuttaa ehdot OX_1Y_1 ja X_1XB. Kolmiossa X_1Y_1B suora XO ei leikkaa sivua X_1Y_1, mutta kyllä sivun X_1B. Aksiomin II. 4 mukaan se leikkaa sivun BY_1. Suora OX ei siis ole L-suoran suuntainen, joten X ei ole γ-piste.

Jäljelle jää siis vain mahdollisuus $X \in (\beta)$, m.o.t.

Lause 6.3. *Luokissa* (α) *ja* (β) *ei ole äärimmäisiä pisteitä.*

Todistus. Kuten edellä on huomautettu, suoran L pisteet X, jotka täyttävät ehdon BPX kuuluvat α-luokkaan; sitä vastoin pisteet X, (PBX), (ynnä B) kuuluvat β-luokkaan. Jos luokassa (α) olisi äärimmäinen piste X_0, olisi siis joko $X_0 = P$ tai BX_0P. Jos taas näin on, kiinnitämme X_0O-suoran ja L:n leikkauspisteen Y_0, joka α-luokan määritelmän mukaan täyttää ehdon X_0OY_0. Olkoon nyt Y — L piste, jolla BY_0Y. Suora YO leikkaa kolmion X_0Y_0B sivun X_0Y_0 pisteessä O; ehdon BY_0Y mukaan se ei leikkaa sivua Y_0B. Paschin aksiomin mukaan se siis kohtaa sivun X_0B pisteessä X, siten että BXX_0. Tämä piste X on α-piste. Toisaalta X_0-luokan (α) äärimmäisenä pisteenä täyttää ehdon BX_0X, olipa X mikä α-piste hyvänsä. Näin on johdettu ristiriita (BXX_0 *ja* BX_0X), ja antiteesi on hylättävä. Luokassa (α) ei siis ole äärimmäistä pistettä X_0.

Samaan tapaan osoitetaan, että (β)-luokassakaan ei ole äärimmäistä pistettä.

6.3. Yhdensuuntaisten suorien olemassaolo

Todistetaan nyt:

Lause 6.4. *Luokka* (γ) *ei ole tyhjä.*

Jos näin olisi, muodostaisivat luokat (α) ja (β) L_1-suoran leikkauksen, ja Dedekindin aksiomista II. 5 seuraisi, että jommassakummassa luokassa olisi äärimmäinen piste, vastoin lausetta 6.3.

Luokassa (γ) on siis ainakin *yksi* piste. Jos pisteitä on useampia, ne muodostavat (suljetun) janan. Sillä lauseista 6.1 ja 6.2. seuraa, että kahden γ-pisteen välissä olevat pisteet jälleen ovat γ-pisteitä. Dedekindin aksiomista päätellään edelleen, että (γ)-luokassa tällöin on kaksi äärimmäistä pistettä, joiden välissä kaikki muut γ-pisteet sijaitsevat.

Koska jokaista γ-pistettä C vastaa sen kautta kulkeva L-suoran suuntainen suora CO, on siis vain kaksi mahdollisuutta:

a) Luokka (γ) sisältää vain yhden pisteen C, ja OC on ainoa O-pisteen kautta kulkeva L:n suuntainen suora.

b) Luokan (γ) pisteitä (C) on äärettömän monta, ja jokainen suora OC on L:n suuntainen. Pisteet (C) muodostavat janan, jota rajoittaa kaksi päätepistettä C_1 ja C_2. Suoria OC_1 ja OC_2 nimitetään pisteen O kautta kulkeviksi L-suoran *rajaparalleeleiksi.* Kaikki muut L:n suuntaiset suorat OC kulkevat rajaparalleelien muodostamassa ristikulmaparissa.

6.4. Paralleeliaksiomi

Molemmat lauseet a) ja b) ovat kompatiibeleja (loogisesti yhteensopivia) aksiomijärjestelmän I. 1—3, II. 1—5 kanssa. Lauseen a) ristiriidattomuus ilmenee mallista M_1 (3.2.). Mallissa M_3 taas toteutuu lause b).

Järjestelmä I. 1—3, II. 1—5 ei vielä ole *täydellinen.* Sekä lause a) että lause b) on siitä riippumaton, ja joko a) tai b) voidaan siis lisätä uudeksi, yhdeksänneksi aksiomiksi, ristiriidattomuuden jäädessä edelleenkin voimaan. Lause a) vie *euklidisen* geometrian, lause b) *epäeuklidisen* geometrian suuntaan. Koska tarkoituksemme on konstruoida ensiksi mainittu järjestelmä, valitaan lause a) uudeksi aksiomiksi.

Aksiomi I. 4 (Paralleelilause). *Suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta kulkee täsmälleen yksi tämän suoran suuntainen suora.*

Tästä päätellään edelleen:

Suora L määrää yksikäsitteisesti sen suuntaisten suorien (L') joukon, siten että tason jokaisen pisteen kautta kulkee täsmälleen yksi suora L'.

§ 7. Vektorien yhdensuuntaisuussiirto

7.1. Vektorin käsite

Järjestetty pistepari A,B $(A \neq B)$ määrää *vektorin*

$$v = (A, B).$$

A on sen »alkupiste», B sen »loppupiste».

Kaksi vektoria $v = (A, B)$ ja $v' = (A', B')$ ovat identtisiä $v \equiv v'$, jos $A = A'$, $B = B'$.

Vektorit (A, B) ja (B, A) ovat *vastakkaisia*. Tällöin merkitään $(B, A) = -(A, B)$.

Vektorikäsite laajennetaan käsittämään tapaus $B = A$. Vektoria (A, A) nimitetään *nollavektoriksi*, ja sitä merkitään (A-pisteestä riippumatta) merkillä $v = 0$. Nollavektori ja sen vastakkainen vektori ovat identtiset.

7.2. Vektorin suunta

Vektori $v = (A, B)$ indukoi järjestyksen lauseiden, erityisesti lauseen 4.1 avulla A:n ja B:n määräämän suoran L kaksi vastakkaista suuntaa. Kääntäen, *suunnattu* (*orientoitu*) suora L kiinnittää pisteparin A, B ($A - L$, $B - L$) järjestyksen, jolloin jana AB muuttuu vektoriksi. Jos pisteet A, B, A', B' ovat suoralla L, niin niiden järjestys määrää, ovatko vektorit (A, B) $(\neq 0)$ ja (A', B') $(\neq 0)$ samansuuntaisia vai vastakkaissuuntaisia.

Vektorien (A, B) ja (A', B') suuntien vertailu voidaan silloinkin toimittaa, kun suorat AB ja $A'B'$ ovat yhdensuuntaiset, esim. näin:

Vektorit ovat *samansuuntaiset*, jos niiden loppupisteet B ja B' ovat *samassa* niistä kahdesta puolitasosta, joita suora AA' rajoittaa. Muuten ne ovat *vastakkaissuuntaiset*.

Paralleelilauseesta seuraa, että vektorien samansuuntaisuus on *ekvivalenssi*: Se on 1) *refleksiivi* (vektori v on itsensä suuntainen), 2) *symmetrinen* (jos v_1, on v_2:n suuntainen, niin v_2:kin on samansuuntainen kuin v_1), 3) *transitiivi* (jos v_1 ja v_2 ovat samansuuntaisia, ja v_2 ja v_3 keskenään samansuuntaisia ovat myös v_1 ja v_3 samansuuntaisia).

Vektori $v = (A, B) \neq 0$ määrää siis yksikäsitteisesti luokan keskenään samansuuntaisia vektoreja, vektori $-v = (B, A)$ vektorin v vastakkaissuuntaisten (mutta keskenään samansuuntaisten) vektorien ekvivalenssiluokan.

Kahta luokkaa, joiden vektorit (A, B) ja (vastaavasti) (A', B') määräävät kaksi toisensa *leikkaavaa* suoraa, ei suunnan puolesta voi verrata toisiinsa.

7.3. Vektorin paralleelisiirto janaa pitkin

Sen jälkeen kun vektorien suunnan vertailu on selvitetty siirrymme erityisempään kysymykseen, voidaanko kahden samansuuntaisen vektorin *pituudet* asettaa keskinäiseen suhteeseen. Tämä voi tapahtua vektorin *paralleelisiirron avulla.*

Olkoon $v_0 = (A_0, B_0) \neq 0$ (se on: $A_0 \neq B_0$). Suora a leikatkoon suoran A_0B_0 pisteessä A_0. B_0-pisteen kautta kulkee täysin määrätty a-suoran suuntainen suora b. Pisteen A ($A - a$, $A \neq A_0$) kautta kulkeva, suoran A_0B_0 suuntainen suora leikkaa paralleelilauseiden nojalla b-suoran (pisteessä B). Nelikulmio A_0B_0BA on suunnikas (so. sivut A_0B_0 ja AB sekä A_0A ja B_0B ovat yhdensuuntaisia).

Sanomme, että vektori $v = (A, B)$ on saatu vektorista $v_0 - (A_0, B_0)$ *paralleelisiirrolla pitkin janaa* A_0A.

Paralleelilauseesta seuraa, että vektorit v, jotka saadaan vektorista $v_0 \neq 0$ paralleelisiirrolla, jälleen ovat $\neq 0$ ja keskenään samansuuntaiset.[1]

7.4. Paralleelisiirto pitkin murtoviivaa

Määritelmänsä mukaan vektorin $v_0 = (A_0, B_0)$ $(\neq 0)$ paralleelisiirto pitkin *annettua suoraa*, joka *leikkaa* suoran A_0B_0 pisteessä A_0, on refleksiivi, symmetrinen ja transitiivinen toimitus. Se määrää siis ekvivalenssiluokan, joiden vektorit kaikki ovat samansuuntaisia.

---

[1] Määritelmästä seuraa, että myös vektorit (A_0, A) ja (B_0, B) saadaan toisistaan paralleelisiirrolla, pitkin suoraa A_0B_0.

Tarkastamme tämän jälkeen järjestettyä pistejoukkoa $A_0, A_1, \ldots, A_n$ ($n \geqq 2$) ja sen määräämää »tietä», murtoviivaa π: $A_0A_1 \ldots A_n$. Olkoon nyt v_0 vektori (A_0, B_0), joka ei ole minkään janan A_0A_1, $A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ suuntainen. Siirrämme vektorin v_0 paralleelisiirrolla ensin vektoria (A_0, A_1) pitkin asemaan $v_1 = (A_1, B_1)$, sitten v_1:n vektoria (A_1, A_2) pitkin asemaan $v_2 = (A_2, B_2)$ jne, kunnes tullaan vektoriin $v_n = (A_n, B_n)$. Kaikki vektorit $v_0, v_1, \ldots, v_n$ ovat samansuuntaiset.

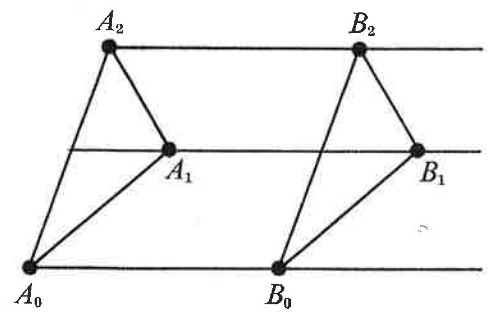
7.5. Paralleelisiirron riippumattomuus tiestä π

Kysymme nyt, onko v_0:sta paralleelisiirrolla saatu loppuvektori $v = v_n$ riippumaton murtoviivan π valinnasta, joka yhdistää alkupisteen A_0 loppupisteeseen $A = A_n$.

Paralleelisiirron määritelmästä seuraa, että näin on, jos viiva π: $A_0A_1 \ldots A_n$ on *suora.*

Jos π sitä vastoin on *murtoviiva*, voidaan edellisen nojalla aluksi vain sanoa, että v_0:n siirtyessä paralleelisti pitkin kahta eri murtoviivaa, jotka yhdistävät alkupisteen A_0 loppupisteeseen A, pisteeseen A siirretyt vektorit ovat alkuvektorin v_0 suuntaiset ja siis keskenäänkin samansuuntaiset. Mutta ovatko ne identtisiä?

On ilmeistä, että tämä kysymys palautuu tapaukseen $n = 2$, jolloin murtoviiva π on kahden janan muodostama. Välttämätön ja riittävä ehto, jotta ko. riippumattomuus tiestä A_0A on voimassa, on yhtäpitävä seuraavan lauseen kanssa:



Kuvio 9.

Vektorin paralleelisiirto pitkin murtoviivaa $A_0 A_1 A_2$ johtaa samaan loppuvektoriin kuin sen paralleelisiirto pitkin janaa A_0A_2.

Tämä lause vuorostaan on yhtäpitävä seuraavan ehdon kanssa:

Vektorin v paralleelisiirto pitkin kolmion piiriä $A_0A_1A_2A_0$ jättää vektorin muuttumatta.

Seuraamme vektorin $v_0 = (A_0, B_0)$ paralleelisiirtoa, ensin murtoviivaa $A_0A_1A_2$ pitkin, jolloin suunnikaskonstruktiolla joudumme ensin vektoriin $v_1 = (A_1, B_1)$, sitten loppuvektoriin $v_2 = (A_2, B_2)$. Jotta v_0:n paralleelisiirto suoraan pitkin janaa A_0A_2 johtaisi samaan vektoriin v_2 on välttämätöntä ja riittävää, että suora B_0B_2 on A_0A_2:n suuntainen.

Näin on laita, jos seuraava lause vuorostaan pätee:

Desargues'n lause. *Olkoot kolmiot $A_0A_1A_2$ ja $B_0B_1B_2$ »affiinissa» asemassa, so. suorat A_0B_0, A_1B_1 ja A_2B_2 ovat keskenään yhdensuuntaisia. Jos tällöin sivut A_0A_1 ja B_0B_1 keskenään ja sivut A_1A_2 ja B_1B_2 keskenään ovat yhdensuuntaiset, on samoin kolmansien sivujen A_0A_2 ja B_0B_2 laita.*

7.6. Desargues'n lauseen riippumattomuus

Osoitamme nyt, että Desargues'n lause ei ole aksioomien I. 1—4, II. 1—5 looginen seuraus. Sitä varten konstruoimme kaksi aritmeettista systeemia, M ja M', jotka molemmat tyydyttävät aksiomit I. 1—4, II. 1—5, jota vastoin Desargues'n lause toteutuu toisessa järjestelmässä M, mutta ei toteudu järjestelmässä M'.

Edelliseksi malliksi (M) valitsemme aritmeettisen systeemin M_1, (3.2).

Malli M' voidaan MOULTONin [1] mukaan konstruoida seuraavalla tavalla:

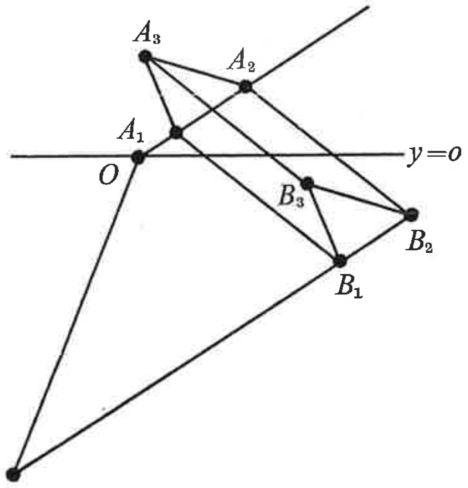
Kuvion 10 mukaisesti se määritellään näin:

1) *Piste P*: järjestetty lukupari (x, y);

2) *Suora L*: järjestetty lukukolmikko (a, b, c), $(a^2 + b^2 > 0)$.

Suorat (a_1, b_1, c_1) ja (a_2, b_2, c_2) ovat *identtisiä*, silloin (ja vain silloin), kun $a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$.

3) *Insidenssi P—L* : Piste P (x, y) ja suora L (a, b, c) ovat insidenttejä:



Kuvio 10.

Jos $ab \geqq 0$ ja $ax + by + c = 0$;
Jos $ab < 0$, $y \geqq 0$ ja $ax + by + c = 0$;
Jos $ab < 0$, $y < 0$ ja $2ax + by + 2c = 0$.

Havainnollisesti lausuttuna: malli M' poikkeaa mallista M vain sikäli, että ne »suorat», joilla $ab < 0$, kulkiessaan x-akselin läpi taittuvat, siten että kulmakerroin puolitasossa $y > 0$ on $-\frac{a}{b}$, mutta puolitasossa $y < 0$ yhtä suuri kuin $-\frac{2a}{b}$.

4) *Järjestyksen suhde*: sama kuin mallissa M.

Mitä Desargues'n lauseeseen tulee, se ilmeisesti, samoin kuin aksiomit I. 1—4, II. 1—5, pätee mallissa M (tavallisessa analyyttisessa geometriassa). Mallissa M' on toisin: siinä aksiomit I. 1—4, II. 1—5 kyllä toteutuvat, mutta Desargues'n lause ei poikkeuksetta ole voimassa.

Tämä selviää kuviosta 10. Siinä pisteet A_1, A_2, A_3 ja B_1, B_2, B_3 on valittu niin, että yhdensuuntaisilla sivuilla A_1A_3 ja B_1B_3 sekä myös sivuilla A_2A_3 ja B_2B_3 on negatiiviset kulmakertoimet ja että samoin on yhdensuuntaisten suorien A_1B_1, A_2B_2 ja A_3B_3 laita. Pisteet A_1, A_2 ovat ylemmässä puolitasossa $y > 0$, pisteet B_1, B_2 alemmassa puolitasossa, siten että janan A_1A_2 kulmakerroin on positiivinen ja jana B_1B_2 *(ta-*

vallisen analyyttisen geometrian tulkinnan mielessä) A_1A_2-janan suuntainen.

Tämä malli M' toteuttaa kaikki aksiomit I. 1—4, II. 1—5.

Kolmiot $A_1A_2A_3$ ja $B_1B_2B_3$ ovat affiinissa asemassa, ja $A_1A_3 \parallel B_1B_3$, $A_2A_3 \parallel B_2B_3$. Desargues'n lauseen olettamukset ovat siis voimassa. Jos nyt tämä lause olisi oikea mallissamme M', tulisi myös pisteiden A_1, A_2 ja B_1, B_2 määräämien »suorien» olla yhdensuuntaisia. Mutta näin ei ole, sillä nämä »suorat» leikkaavat toisensa alemman puolitason pisteessä P.

Tästä ilmenee, että Desargues'n lause on riippumaton aksiomeista I. 1—4, II. 1—5. Näiden muodostama järjestelmä ei ole täydellinen, ja ristiriidattomuutta loukkaamatta voidaan siis lisäaksiomiksi ottaa:

Aksiomi I. 5. Desargues'n lause.

Tulemme myöhemmin osoittamaan, että tavoitteemme siten on täydellisesti saavutettu: Järjestelmä I. 1—5, II. 1—5 ei ole vain riippumaton ja ristiriidaton, vaan myös *täydellinen*.

§ 8. Vektorialgebra

8.1. Samansuuntaisten vektorien yhtäsuuruus

Paralleelisiirron avulla samansuuntaisten vektorien joukko voidaan jakaa osajoukkoihin, siten että samaan osajoukkoon kuuluvat vektorit ovat keskenään samanpituisia eli *yhtäsuuria*.

Määritelmä. Olkoon v_1 vektori $(A_1, B_1) \neq 0$. Sanomme, että vektori $v_2 = (A_2, B_2)$ on *yhtäsuuri* kuin v_1, merkein $v_1 = v_2$, jos v_2 saadaan vektorista v_1 paralleelisiirrolla.

§:stä 7 seuraa, että tämä »yhtäsuuruuden» käsite on ekvivalenssi (se on refleksiivi, symmetrinen ja transitiivi). Identiteetti $v_1 \equiv v_2$ (so. $A_1 \equiv A_2$, $B_1 \equiv B_2$) on siis yhtäsuuruuden $v_1 = v_2$ erikoistapaus.

Yhtäsuuruuden käsite ekvivalenssina jakaa samansuuntaisten vektorien joukon elementtivieraisiin (disjunkteihin) ekvivalenssiluokkiin. Samaan luokkaan kuuluvat vektorit ovat keskenään yhtäsuuret.

Alla oleva lause on seuraavan esityksen kannalta perustava:

Lause 8. 1. Olkoon annettuna vektori $v = (A, B)$ $(A \neq B)$ sekä piste C. Silloin on olemassa (yksi ja vain yksi) neljäs piste D, niin että $(A, B) = (C, D)$.

Ellei C ole suoralla AB, riittää v:n pelkkä paralleelisiirto pitkin janaa AC pisteen D määräämiseksi. Jos sitä vastoin C insidoi suoran AB kanssa, saadaan D-piste siirtämällä (A, B) pitkin murtoviivaa APC, missä P on mielivaltainen suoran AB ulkopuolella oleva piste. Tulos on riippumaton apupisteen P valinnasta, kuten Desargues'in aksiomista selviää.

8.2. Summa

Asetamme määritelmän: Kahden vektorin $v_1 = (A_1, B_1)$, $v_2 = (A_2, B_2)$ summalla tarkoitetaan vektoria

$$v = v_1 + v_2 = (A_1, C_1),$$

joka saadaan siirtämällä v_2 yhdensuuntaisesti asemaan $v_2' = (B_1, C_1)$.

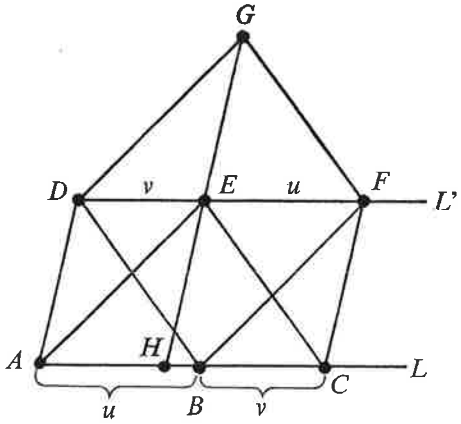
Lauseesta 7. 5 seuraa, että $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$, jos $u_1 = v_1, u_2 = v_2$.

Lisäksi vallitsevat:

8.3. Summan vaihdannaisuus ja liitännäisyys

Kommutaatiolain $u + v = v + u$ todistamiseksi riittää olettaa, että vektorit on siirretty asemaan $u = (A, B)$, $v = (B, C)$. Jos tällöin A, B, C eivät ole samalla suoralla, väitetty vaihdannaisuus on ilmeinen.

Jos sitä vastoin pisteet A, B, C ovat samalla suoralla, valitaan suoran $L = ABC$ ulkopuolelta neljäs piste D, asetetaan tämän kautta suora $L' \parallel L$. ja siirretään vektori $v = (B, C)$ asemaan $(D, E) = v$ ja siitä edelleen asemaan $(A, H) = v$ $(DA \parallel EH)$. Olkoon $CF \parallel AD$ $(\parallel HE)$. Silloin on $u + v = (A, C) = (D, F) = (D, E) + (E, F) = v + (E, F)$. Vaihdantalain $u + v = v + u$ todistamiseksi on siis vain näytet-



Kuvio 11.

tävä, että (E, F) saadaan vektorista $u = (A, B)$ paralleelisiirrolla, siis että suora $AE \parallel BF$.

Tämä osoitetaan soveltamalla kahdesti Desargues'n aksiomia I. 5, seuraavalla tavalla. Pisteen D kautta kulkeva suoran AE suuntainen suora leikatkoon suoran HE pisteessä G. Kolmiot AEC ja DGF ovat affiinissa asemassa. Sivut AC ja DF samoin kuin AE ja DG ovat yhdensuuntaiset. Aksiomin I. 5 mukaan myös kolmannet sivut EC ja GF silloin ovat yhdensuuntaiset. Siis kolmiot BCF ja DEG ovat affiinissa asemassa, ja koska $BC = DE$, $CF = EG$, on aksiomin I. 5 mukaan myös $BF = DG = AE$, m.o.t.

Yhteenlaskun *liitännäisyys* seuraa murtoviivaa pitkin tapahtuvan paralleellisiirron yksikäsitteisyydestä.

8.4. Erotus

Vektorien yhtässuuruuden ja summan määritelmistä seuraa, että kahta vektoria vastaa tietty (parallelisiirtoa vaille yksikäsitteisesti määrätty) kolmas vektori x, niin että

$$u + x = v.$$

Vektori x on vektorien v ja u *erotus* ja merkitään

$$x = v - u.$$

Erityisesti on

$$0 + u = u + 0, 0 - u = -u = 0 + (-u),$$

missä vektorit $0 = (A, A)$, $u = (A, B)$, $-u = (B, A)$.

8.5. Vektorin kertominen kokonaisluvulla

Olkoon λ luonnollinen (so. positiivinen, kokonainen) luku. Vektorin u ja λ:n tulo määritellään näin:

$$1 \cdot u = u, \text{ kun } \lambda = 1, \lambda \cdot u = \overbrace{u + \ldots + u}^{\lambda \text{ kertaa}}, \text{ kun } \lambda > 1.$$

Koska kahden samansuuntaisen vektorin ($\neq 0$) summa jälleen on samansuuntainen vektori, seuraa tästä, että tulo $\lambda \cdot u = 0$ silloin ja vain silloin kun $u = 0$.

Välittömästi todistetaan

Osittelulaki: $(\lambda + \mu)\, u = \lambda u + \mu u$, $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ (λ, μ luonnollisia lukuja),

sekä

Liitäntälaki: $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

Edelleen on, kun $\lambda > \mu$,

$$(\lambda - \mu) \cdot u = \lambda \cdot u - \mu \cdot u,$$

ja tämän säännön yleispätevyys saavutetaan, jos määritellään[1]

$$0 \cdot u = 0, (-\lambda) \cdot u = -(\lambda \cdot u).$$

Tästä seuraa, λ:n ollessa mielivaltainen kokonaisluku:

Tulo $\lambda \cdot u = 0$ silloin ja vain silloin kun ainakin toinen tekijöistä (λ, u) on nolla.

8.6. Kertominen rationaaliluvulla

Olkoot ν luonnollinen luku ja u vektori. Yhtälöllä $\nu \cdot x = u$ on ainoana ratkaisuna nollavektori $x = 0$, jos vektori $u = 0$. Jos taas $u = (A, B)$

[1] Seuraavassa merkitsemme *lukua* nolla ja *vektoria* nolla samalla merkillä 0, mikä uskin voi johtaa väärinkäsityksiin.

Kuvio 12.

$\neq 0$, saadaan x kuvion 12 konstruktiolla, missä C on suoran AB ulkopuolella oleva piste ja $(A, C) = \nu$, $(A, D) = \nu \cdot \nu$, $CE \parallel DB$.

Vektori x on tehtävän ainoa ratkaisu. Se merkitään $x = \frac{u}{\nu}$ (»u jaettuna ν:llä», tai »u:n ν:s osa»). Vektorit u ja $x = (A, E)$ ovat samansuuntaiset.

Määritellään edelleen:

$$\frac{1}{\nu} \cdot u = \frac{u}{\nu},$$

sekä (μ, ν luonnollisia lukuja)

$$\frac{\mu}{\nu} \cdot u = \frac{\mu \cdot u}{\nu} = \frac{1}{\nu}(\mu \cdot u),$$

ja vihdoin

$$-\left(\frac{\mu}{\nu}\right)u = \left(\frac{-\mu}{\nu}\right)u = \frac{\mu \cdot u}{-\nu} = -\frac{\mu u}{\nu}.$$

Vielä on tulo määriteltävä kertojan ollessa *irrationaaliluku.*

8.7. Lukusuora

Tämän määritelmän asettamiseksi on mukava siirtää samansuuntaisten vektorien joukko niin, että niiden alkupisteet yhtyvät. Olkoon (L)

suorien luokka, jotka ovat annetun L_0-suoran suuntaiset. Olkoot O ja E kaksi tämän suoran pistettä.

Vektori $(O, E) = e$ kiinnittää L_0-suoran suunnan: nimitämme sitä *positiiviseksi*, vastakkaista suuntaa *negatiiviseksi*. Olkoon nyt $u \neq 0$ suoran L_0 suuntainen vektori. L_0-suoralla on tietty piste X, siten että $u = (O, X)$ Tämä piste X jää paikalleen, jos u vaihdetaan vektoriksi $v = u$. Jos sitä vastoin v ja u ovat yhdensuuntaisia, mutta $v \neq u$, niin vektorin $(O, Y) = v$ päätepiste $Y \neq X$. Jos vielä annamme nollavektorin $(O, X), X = O$ vastata vektoreja $u = 0$, on täten aikaansaatu kääntäen yksikäsitteinen (yksi-yksikäsitteinen) kuvaus $u \longleftrightarrow X$ pisteiden X — L_0 ja L_0:n suuntaisten vektorien u välillä.

Yhtäsuuruus $u = v$ vallitsee silloin ja vain silloin, kun v:tä vastaava piste Y—L_0 yhtyy X-pisteeseen. Jos sitä vastoin $u \neq v$ $(X \neq Y)$, asetetaan

Määritelmä. Jos $u = (O, X)$ on positiivinen $(u > 0)$, niin $u < v$ $(= (O, Y))$, kun OXY.

Jos $u < 0$, niin $u < v$, kun joko XYO tai XOY.

Eli lyhyemmin: $u < v$ merkitsee samaa kuin $v - u > 0$.

Epäyhtälö $u > v$ merkitsee: $u < v$.

Täten on aikaansaatu *isomorfia* suoran L_0 suuntaisten vektorien u, v suuruusjärjestyksen $(u \lesseqgtr v)$ ja suoran L_0 pisteiden $(X, Y, \ldots)$ järjestyksen välille.

Tarkastamme tämän jälkeen suoralla L_0 olevien pisteiden (R) joukkoa, joilla $(O, R) = \xi \cdot e = \xi \cdot (O, E)$, missä ξ on rationaaliluku. Näitä pisteitä R nimitämme »lukusuoran» L_0 *rationaalipisteiksi*.

Edellisen mukaan vallitsevat säännöt:

1) Olkoon vektori $u \parallel L_0$ ja ξ rationaaliluku. Tulo $\xi \cdot u$ on kertojiin (ξ) nähden vaihdannainen, liitännäinen ja distributiivinen.

2) Olkoon $u > 0$ (u ja vektori (O, E) samansuuntaiset). Rationaalikertojan ξ ja u:n tulo, $\xi \cdot u$ on positiivinen, nolla tai negatiivinen sen mukaan, onko $\xi > 0, \xi = 0$ tai $\xi < 0$.

3) Olkoon piste $X — L_0$ $(X \neq O)$. Silloin on suoran L_0 rationaalipisteiden R joukossa sellaisia, joilla OXR.

Lauseiden 1) ja 2) todistukset seuraavat helposti tulon $\xi \cdot e$ (ξ rationaaliluku) määritelmästä sekä tällaisen tulon ominaisuuksista, kertojan ξ ollessa kokonaisluku.

Sitä vastoin lause 3) vaatii tarkempaa perustelua. Tätä varten tarvitsemme lauseen, joka sinänsäkin näyttelee tärkeää osaa alkeisgeometrian järjestelmässä.

8.8. Arkhimedeen lause

Olkoon $X \neq O$ mielivaltainen suoran L_0 piste. Silloin on kokonainen luku n, jolla piste R, $(O. R) = n \cdot e = n \cdot (O, E)$, täyttää ehdon OXR.

Todistusta varten voimme rajoittua tapaukseen OEX. Asetetaan tällöin.

Antiteesi. On sellainen piste X (OEX), että $(O, P_n) = n \cdot e \leqq (O, X)$, olipa kokonaisluku n (> 0) miten suuri hyvänsä.

Kuvio 13.

Olkoon (B) niiden pisteiden $P — L_0$ joukko, joilla on ominaisuus $n \cdot e \leqq (O, P)$ $(n = 1, 2, \cdots)$. (A)-luokkaan viedään kaikki muut pisteet $P — L_0$. Kumpainenkaan luokka ei ole tyhjä, sillä $X \in (B)$ ja $E \in (A)$.

Jos $P_0 \in (B)$, on kaikkien pisteiden P (OP_0P) laita samoin. Tästä seuraa, että $(A) \mid (B)$ on Dedekindin leikkaus. Dedekindin aksiomin mukaan joko luokassa (A) tai luokassa (B) on äärimmäinen piste.

Olettakaamme, että B_0 on (B)-luokan äärimmäinen piste. Kaikki muut B-pisteet täyttävät silloin ehdon OB_0B. Muodostamme erotuksen $(O, B_0) — e = (O, B_1)$. Luokan (B) määritelmän mukaan on $(n + 1). e \leqq (O, B_0)$, olipa $n > 0$ mikä kokonaisluku hyvänsä. Mutta vektorien yhtä- ja erisuuruutta koskevista lauseista seuraa tästä, että $(O, B_1) = (O, B_0) — e \leqq (n + 1) \cdot e — e \leqq n \cdot e$ $(n = 1, 2, \ldots)$, minkä mukaan B_1 on (B)-piste, jolla OB_1B_0. Piste B_0 ei siis ole (B)-luokan äärimmäinen piste.

Samaan tapaan todistetaan, että A-luokassakaan ei ole äärimmäistä pistettä.

Näin on tultu ristiriitaan. Antiteesi on hylättävä, ja Arkhimedeen lause on siis aksiomien I. 1—5, II. 1—5 seuraus.

8.9. Vektorin kertominen irrationaaliluvulla

Olkoon $\gamma > 0$ lukuleikkauksen $(\alpha) \mid (\beta)$ määräämä irrationaaliluku (α, β rationaalilukuja). Tarkastamme suoran L_0 vektoria $e = (O, E)$ ja rationaalipisteitä R $((O, R) = r \cdot (O, E))$. L_0-suoran pisteet (P) jaetaan jälleen kahteen luokkaan (A) ja (B). Jälkimmäinen luokka käsittäköön kaikki pisteet $P — L_0$, joilla $\alpha \cdot e < (O, P)$, kaikilla luvuilla (α). Luokan (A) muodostavat kaikki muut pisteet $P — L_0$. Luokat eivät ole tyhjiä. Rationaalipisteet $P = R$, jotka vastaavat kertojia $r = \alpha$, ovat A-pisteitä.

Koska γ on irrationaaliluku, luokissa (α), (β) ei ole äärimmäisiä lukuja. Dedekindin aksiomin II. 5 mukaan joko pisteluokassa (A) tai luokassa (B) on äärimmäinen piste P. Asetetaan nyt määritelmät

$$\gamma \cdot e = (O, P), \text{ jos } \gamma > 0,$$
$$\gamma \cdot e = -(|\gamma| \cdot e), \text{ jos } \gamma < 0.$$

8.10. Täydellinen lukusuora

Annamme μ:lle kaikki reaaliarvot ja tarkastamme lukusuoran L_0 pisteitä C, joilla

$$(O, C) = \mu \cdot e.$$

Pisteiden C järjestys ja lukujen μ suuruusjärjestys ovat isomorfeja.

Lause 8. 1. *Pistejoukko (C) peittää suoran L_0 aukottomasti.*

Olkoon piste $P — L_0$ annettu. On näytettävä, että on reaaliluku c, jolla $(O, P) = c \cdot e \; (= c \cdot (O, E))$.

Oletamme ensiksi, että P sijaitsee vektorin e suuntaisella, O-pisteen rajoittamalla säteellä. Jos P on rationaalipiste: $(O, P) = r \cdot e$, niin rationaaliluku $c = r$ on määrättävä kertoja. Ellei P ole rationaalipiste, määritellään rationaalilukujen r leikkaus $(\alpha) \mid (\beta)$ siten, että r kuuluu luokkaan (α), jos $r \cdot e < (O, P)$, ja luokka (β) käsittää muut rationaaliluvut r (joilla siis $r \cdot e > (O, P)$). Luokkaan (α) kuuluvat kaikki negatiiviset rationaaliluvut. Luokka (β) ei myöskään ole tyhjä, mikä todistetaan Arkhimedeen lauseen nojalla. Lukuleikkaus $(\alpha) \mid (\beta)$ määrittelee siis irrationaaliluvun γ, ja edellä asetetusta tulon $\gamma \cdot e$

määritelmästä seuraa, että $c = \gamma$ toteuttaa vaaditun ehdon $c \cdot e = (O, P)$.

Jos suhde POE vallitsee, määrätään piste Q ehdon $(O, Q) = -(P, O)$ mukaan. Silloin on olemassa positiivinen reaaliluku c, niin että $(O, Q) = c \cdot e$, ja luku $-c$ täyttää vaatimuksen $(-c) \cdot e = (O, P)$.

Siten on konstruoitu kääntäen yksikäsitteinen, »järjestyksen» suhteen isomorfi vastaavaisuus toisaalta reaalilukujen, toisaalta suoran pisteiden kesken.

8.11. Vektoriopin peruslauseet

Affiinin tasogeometrian yllä esitetyt perusteet yhdistämme seuraavaan tiivistelmään.

Oletetaan annetuksi:

a) Kaksi *perusalkioiden* joukkoa: pisteet (P) ja suorat (L).

b) Kaksi *perussuhdetta*: $P - L$ pisteiden ja suorien välillä (»insidenssi»), sekä kolmen pisteen: $P_1P_2P_3$ »järjestyksen» suhde;

c) Kymmenen *perussääntöä, aksiomit* I. 1—5, II. 1—5, joita perusalkiot ja perussuhteet noudattavat.

Tältä pohjalta rakennetaan: vektorien $v = (A, B)$ *paralleelisiirron* oppi, vektorien *yhtäsuuruuden*[1] käsite ja *vektorialgebra* (ns. viivallinen algebra).

Viimeksi mainittu algebrallinen järjestelmä tyydyttää alla olevat ehdot:

A. Kahta vektoria a ja b vastaa yksikäsitteisesti kolmas vektori niiden »summana» $a + b$.

A_1 Summa on vaihdannainen (kommutatiivi): $a + b = b + a$.

A_2. Summa on liitännäinen (assokiatiivi): $a + (b + c) = (a + b) + c$.

A_3. Kahta vektoria a ja b vastaa yksikäsitteisesti kolmas vektori x, siten että $a + x = b$. Vektori x merkitään $b - a$ (b:n ja a:n »erotus»). Jos $b = a$, on erotus x a:sta riippumaton nollavektori $(0 = a - a)$. Erotusta $0 - a$ merkitää lyhyemmin: $-a$.

[1] Yhtäsuuruus $u = v$ on käsitettävä identiteettinä $u \equiv v$, *modulo paralleelisiirto.*

B. Reaalilukua λ ja vektoria u vastaa yksikäsitteisesti vektori v niiden »tulona»: $v = \lambda \cdot u$.[1]

B_1. Tulo on liitännäinen: $(\lambda\mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$;

B_2. Tulo on distributatiivi

$$(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u, \quad \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v;$$

B_3. $1 \cdot u = u$;

B_4. $\mu \cdot u = 0$ (nollavektori!) silloin ja vain silloin, kun ainakin toinen tekijöistä (μ ja u) on nolla.

§ 9. Affiinit koordinaatistot

9.1. Kahden vektorin suhde

Kohdassa 8.7 esitetystä isomorfiasta suoran pisteiden ja reaalilukujen »järjestysten» suhteen sekä 8. pykälässä esitetystä vektorialgebrasta seuraa erikoisesti (kuten osittain jo on mainittu):

1) Vektoria u ja reaalilukua λ vastaa vektori $v = \lambda \cdot u$, joka parallelisiirtoa vaille on yksikäsitteisesti määrätty.

Vektori $v = 0$ silloin ja vain silloin, kun $\lambda = 0$ tai $u = 0$ tai $\lambda = 0$, $u = 0$.

Jos $u \neq 0$, $\lambda \neq 0$, tulovektori $v = \lambda \cdot u$ ja kerrottava u ovat samansuuntaisia, kun $\lambda > 0$, ja vastakkaissuuntaisia, kun $\lambda < 0$.

2) Kääntäen: jos vektorit u ja v ovat yhdensuuntaiset (joko saman taikka vastakkaissuuntaiset), on olemassa täsmälleen yksi reaaliluku λ (joko > 0 taikka < 0) siten että $v = \lambda \cdot u$.

Jos $u \neq 0$ ja $v = 0$, on $\lambda = 0$.

Kertojaa λ nimitetään vektorien v ja u ($\neq 0$) *suhteeksi* eli myös v:n *mittaluvuksi*, kun u on *mittana* eli *yksikkönä*.

---

[1] Säännöt (B) olemme edellä todistaneet rationaalisille kertojille. Näistä erikoisista säännöistä ynnä tulon $\lambda \cdot u$ määritelmästä, kertojan λ ollessa irrationaaliluku, seuraa helposti ko. sääntöjen yleispätevyys.

Tämä voidaan nyt esittää, kuten Eukleideen »Alkeissa» on osoitettu.

Ensiksi todistetaan »yhdensuuntaisia transversaaleja» koskeva

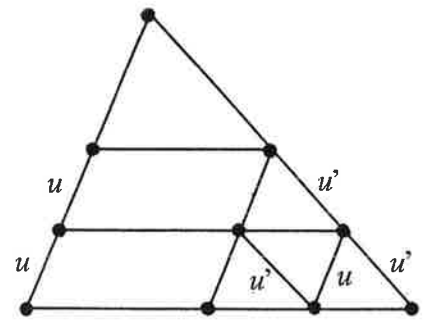
Lause 9. 1. *Jos kaksi suoraa leikataan yhdensuuntaisilla suorilla, niin näiden väliset janat ovat verrannolliset.* ($u : v = u' : v'$).

Jos ensiksi $u = v$, $u : v = 1$, ne saadaan toisistaan paralleelisiirrolla. Kuvion 14 konstruktio osoittaa, että tällöin u' ja v' saadaan toisistaan paralleelisiirrolla, joten $u' = v'$, $u' : v' = 1$.

Jos taas $\lambda = u : v$ on rationaaliluku, $\lambda = \frac{m}{n}$ (m ja n positiivisia kokonaislukuja), niin vektoreilla u ja v on yhteinen mitta $\frac{1}{n} \cdot v = e$, ja $u = m \cdot e$, $v = n \cdot e$. Edellisen tapauksen ($\lambda = 1$) päättely johtaa tulokseen $u' = m \cdot \frac{v'}{n}$, joten $u' = \lambda \cdot v'$.

Jos vihdoin $\lambda = u : v$ on irrationaaliluku niin vektorit u ja v ovat yhteismitattomia.

Olkoon $(\alpha) \mid (\beta)$ luvun λ Dedekindin leikkaus (α ja β rationaalilukuja). Edellä oleva päättely (λ:n ollessa rationaaliluku) osoittaa, että suhde $\lambda' = u' : v'$ määräytyy *saman* leikkauksen $(\alpha) \mid (\beta)$ avulla, joten $\lambda' = \lambda$, m.o.t.



Kuvio 14.

Yllä olevasta seuraa tärkeä

Lause 9. 2. *Jos kolmio OAB leikataan sivun AB suuntaisella suoralla $A'B'$, on*

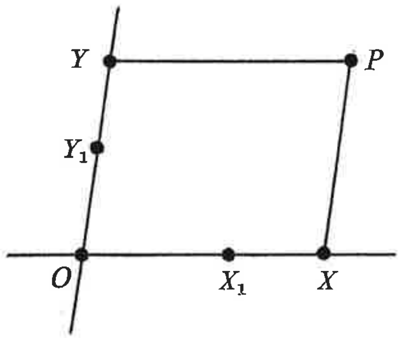
$$(O, A) : (O, A') = (O, B) : (O, B') = (A, B) : (A', B').$$

9.3. Affiinit koordinaatistot

Olkoot O, X_1, Y_1 kolme pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla, sekä P mielivaltainen piste. Projisioidaan tämä vektorien (O, X_1) ja (O, Y_1) suuntaisilla suorilla suorille OY_1 ja OX_1. Näin saadut P-pisteen projektiot olkoot Y ja X. Reaaliluvut

$$\begin{cases} x = (O, X) : (O, X_1), \\ y = (O, Y) : (O, Y_1) \end{cases}$$

ovat P-pisteen *koordinaatit* pisteiden O, X_1, Y_1 määräämässä *koordinaatistossa*. Sen alkupisteellä (origolla) O on koordinaatit $x = y = 0$.



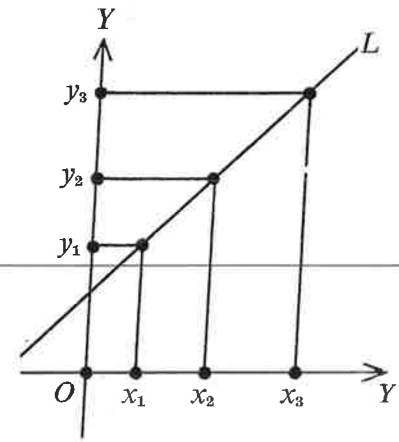
Kuvio 15.

Kantavektorien (O, X_1) ja (O, Y_1) päätepisteillä X_1 ja Y_1 on koordinaatit (1,0) ja (0,1).

Kääntäen vastaa jokaista järjestettyä reaalilukuparia (x, y) täysin määrätty piste $P(x, y)$, jolla on koordinaatit (x, y). Kuvaus $P \longleftrightarrow (x, y)$ on siis kääntäen yksikäsitteinen.

9.4. Suoran yhtälö

Olkoot P_ν (x_ν, y_ν) kolme pistettä ($\nu = 1, 2, 3$). Jos ne ovat samalla suoralla L, joka ei ole kummankaan koordinaattiakselin (OX_1, OY_1) suuntainen,



Kuvio 16.

seuraa lauseesta 9. 1, että

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}.$$

eli

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{9.1}$$

Oletetaan kääntäen yhtälö (9.1), yhdistetään pisteet P_1 ja P_2 suoralla L ja merkitään suoran L ja pisteen P_3 kautta kulkevan, y-akselin suuntaisen suoran leikkauspistettä P_3':lla. Lauseesta 9. 1 seuraa, että $P_3' = P_3$, ja pisteet P_1, P_2, P_3 ovat siis samalla suoralla (L).

Välittömästi todetaan, että sama tulos pitää paikkansa, jos L on jommankumman koordinaattiakselin suuntainen.

Olemme siis todistaneet:

Lause 9. 3. *Välttämätöntä ja riittävää, jotta pisteet* P_1 $(x_1 y_1)$, P_2 (x_2, y_2), P_3 (x_3, y_3) *ovat samalla suoralla on että determinantti* (9.1) *häviää.*

Jos nyt annamme pisteen $x = x_3, y = y_3$ liikkua pisteiden $P_1 (x_1, y_1)$ ja $P_2 (x_2, y_2)$ kautta kulkevalla suoralla L, on

(9.2.)
$$ax + by + c = 0,$$

missä $a = y_1 - y_2$, $b = x_2 - x_1$, $c = x_1 y_2 - x_2 y_1$.

Suoran yhtälö on siis ensiasteinen. Kaksi suoraa on silloin ja vain yhdensuuntaista, kun x:n ja y:n kertoimet niitä vastaavissa yhtälöissä ovat verrannolliset, ja ne ovat identtiset, jos vastaavien yhtälöjen kaikki kertoimet ovat verrannollisia.

9.5. Järjestyksen suhde

Vihdoin todetaan, että järjestyksen perussuhde $P_1 P_2 P_3$ pätee silloin ja vain silloin, kun vastaavat koordinaatit tyydyttävät ehdot

(9.3)
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ja

(9.4)
$$(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \leqq 0, \quad (y_2 - y_1)(y_2 - y_3) \leqq 0,$$

jolloin yhtäsuuruus vallitsee korkeintaan jommassakummassa näistä epäyhtälöistä.

Epäyhtälöt (9.4) lausuvat lyhyesti sen, että P_2:n koordinaatit suuruudeltaan ovat pisteiden P_1 ja P_3 vastaavien koordinaattien välissä.

§ 10. Affiinin geometrian täydellisyys

10.1. Affiini geometria ja analyyttinen geometria

Olemme jo nähneet, että mallin M (7.6) mukainen analyyttinen geometria tyydyttää kaikki affiinin geometrian kymmenen aksiomia I. 1—5, II. 1—5, jos affiinin geometrian järjestelmän (AG) perusalkiot ja perussuhteet tulkitaan aritmeettisesti näin:

Järjestelmä AG	*Järjestelmä M*
Piste P	Järjestetty lukupari (x,y)
Suora L	Kolmen reaaliluvun suhde $a : b : c$
Insidenssi $P - L$	$ax + by + c = 0$
Järjestys $P_1P_2P_3$	Vastaavat koordinaatit (x_ν, y_ν) $(\nu = 1, 2, 3)$ toteuttavat ehdot (9.3) ja (9.4) (kohta 9.5)

Kohta 9.3 täydentää tätä vastaavaisuutta ($M \rightarrow AG$) merkittävästi: Siitä ilmenee, että myös järjestelmän AG ollessa annettu (perusalkioineen, perussuhteineen ja aksiomeineen I. 1—5, II. 1—5) se voidaan kuvata järjestelmälle M.

Täten on aikaansaatu *kääntäen yksikäsitteinen* ja *perussuhteet säilyttävä* (siis *isomorfi*) kuvaus $AG \longleftrightarrow M$. Tämä kuvaus on (vrt. 9.3) täysin määrätty, jos *kolmea mielivaltaista pistettä* O, X_1, Y_1, jotka eivät ole samalla suoralla, *vastaamaan asetetaan lukuparit* (0,0), (1,0), (0,1). Silloin näet määräytyy koordinaatisto, jossa yllä olevan taulukon osoittamat vastaavaisuudet toteutuvat.

10.2. Affiinin geometrian täydellisyys

Mallin M avulla on osoitettu, että affiinin geometrian AG aksiomijärjestelmän aksiomit I. 1—5, II. 1—5 ovat keskenään ristiriidattomia ja toisistaan loogisesti riippumattomia. Tulemme nyt kysymykseen: onko systeemi *AG täydellinen*?

Edellä olevassa tutkimuksessa olemme määritelleet järjestelmän täydellisyyden epätäydellisyys-käsitteen loogisena vastakohtana. *Epätäydelliseksi* olemme tällöin katsoneet aksiomisysteemiä S, jos se sisältää kaksi lausumaa T ja $\overline{T}$, jotka tyydyttävät ehdot:

1) Lausumat T ja $\overline{T}$ ovat S-järjestelmän mielekkäitä lausumia (vrt. 1.4);

2) T ja $\overline{T}$ ovat suoranaisessa loogisessa ristiriidassa keskenään;

3) Sekä T että myös $\overline{T}$ muodostaa S:n aksiomien kanssa ristiriidattoman systeemin.

Niinpä todistaaksemme aksiomijärjestelmien I. 1—4, II. 1—5 epätäydellisyyden osoitettiin, että lause T (Desargues'n lause I. 5) ja sen vastalause $\bar{T}$ (»Desargues'n lause ei pidä paikkansa») *molemmat* ovat riippumattomat aksiomeista I. 1—4, II. 1—5. Lause I. 5 voitiin tämän jälkeen lisätä affiinin geometrian uudeksi, kymmenenneksi aksiomiksi, ja näin laajennettu aksiomijärjestelmä AG täyttää edelleenkin ristiriidattomuuden ja riippumattomuuden vaatimukset.

Tällainen aksiomisysteemin A: I. 1—5, II. 1—5 täydennys jollakin uudella (riippumattomalla ja ristiriidattomalla) lisäaksiomilla ei enää ole mahdollinen. Sillä olkoot M_1 ja M_2 kaksi järjestelmän AG mallia, jotka molemmat toteuttavat aksiomit A. Kohdan 9.3 mukaan molemmat mallit M_1 ja M_2 ovat *isomorfeja* aksiomien A avulla rakennetun AG-järjestelmän kanssa. Siitä seuraa, että myös järjestelmät M_1 ja M_2 ovat keskenään isomorfeja: Voidaan konstruoida M_1:n ja M_2:n perusalkioiden ja perussuhteiden kääntäen yksikäsitteinen kuvaus eli vastaavaisuus, siten että jokainen lausuma, joka pätee toisessa järjestelmässä, pätee myös toisessa. Tässä mielessä affiini geometria on täydellinen: se on *yksikäsitteisesti määrätty, isomorfiaa vaille.*

10.3. Huomautus

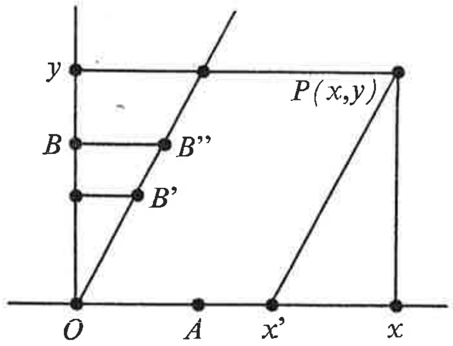
Tämä *täydellisyyden* eli *monomorfian* käsite, jonka mukaan siis järjestelmän AG looginen rakenne (isomorfiaa vaille) on täysin määrätty, ei loogisessa katsannossa ole täysin yhtäpitävä esityksemme alussa (kohta 1.8) annetun selityksen kanssa. Siellä jonkin systeemin S täydellisyys pohjimmiltaan kytkeytyi »ratkeavaisuuden» (»Entscheidbarkeit») kysymykseen. Sanoimmehan järjestelmää S täydelliseksi, jos T:n ollessa mielekäs lausuma (joka siis operoi vain S:n perusobjekteilla ja -relaatioilla) *joko* itse *taikka* sitten sen looginen vastalausuma $\bar{T}$ on johdettavissa S:n aksiomeista. Mutta kysymys, onko esim. aritmetiikka, jota edellä olemme käyttäneet ristiriidattomana vertailujärjestelmänä, siinä mielessä »täydellinen», että jokaisen aritmeettisen lausuman T suhteen voidaan ratkaista, onko joko T taikka sitten $\bar{T}$ todistettavissa (so. johdettavissa aritmetiikan aksiomeista äärellisellä määrällä peräkkäisiä loogisia päätelmiä), on pulmallinen ongelma (johon mm. Brouwerin inspiroima ns. intuitionistinen logiikka on kiinnittänyt huomion). Huomattakoon kuitenkin, että tämä »ratkeavaisuuden» kysymys edellä esitetyn tutkimuksemme kannalta on irrelevantti: sillä olemme operoineet vain sellaisilla aritmeettisilla lauseilla, jotka äsken esitetyssä mielessä ovat todistettavissa (ja siis »ratkeavia»).

Täydellisyyden käsite, minkä HILBERT perustavassa teoksessaan [1] on esittänyt, poikkeaa ainakin muodollisesti yllä puheena olleesta määrittelystä; emme tässä puutu siihen.

§ 11. Koordinaattimuunnoksista

11.1. Siirtyminen koordinaatistosta toiseen koordinaatistoon

Miten pisteen P koordinaatit muuttuvat, kun siirrytään kordinaatistosta $K(O, A, B)$ toiseen K' (O', A', B')? Käyttämällä vektorialgebraa tämä kysymys on helppo ratkaista. Seuraavassa käsittelemme sitä liittyen suoranaisemmin *geometriseen* affiiniin järjestelmään.



Kuvio 17.

Olkoon ensiksi $O = O'$, $A = A'$. Jos pisteet O, B ja B' ovat samalla suoralla, muuttuu vain P-pisteen y-koordinaatti, arvosta y arvoksi $y' = \mu y$, missä $\mu = (O, B) : (O, B')$.

Jos sitä vastoin B' ei ole suoralla OB, saadaan (kuvio 17)

$$y = (O, Y) : (O, B) = (O, Y') : (O, B'') \text{ ja}$$
$$y' = (O, Y') : (O, B') = [(O, B'') : (O, B')] \cdot [(O, Y') : (O, B'')] = \mu \cdot y,$$

missä nyt $\mu = (O, B'') : (O, B')$.

Edelleen on

$$\begin{aligned} x' - x &= (Y, Y') : (O, A) \\ &= [(Y, Y') : (B, B'')] \cdot [(B, B'') : (O, A)] \\ &= [(O,Y) : (O, B)] \cdot [(B, B'') : (O, A)] \\ &= \lambda y, \end{aligned}$$

missä $\lambda = (B, B'') : (O, A)$.

Siis on

$$x' = x + \lambda y, \; y' = \mu y.$$

Samaan tapaan siirrytään pistekolmikosta (O, A, B') kolmikkoon (O, A', B'). Uudet koordinaatit saadaan jälleen järjestelmän (O, A, B') koordinaateista viivallisen, homogeenin muunnoksen avulla. Kun alkupiste O vihdoin siirretään pisteeseen O', on koordinaatteihin vain lisättävä vakiot. Saadaan siis kaavat

$$(11{,}1) \quad x' = a_1x + b_1y + c_1, \; y' = a_2x + b_2y + c_2,$$

jotka välittävät siirtymisen koordinaatistosta K koordinaatistoon K'. Olettamuksesta, että pisteet O', A', B' eivät ole samalla suoralla, seuraa, että

$$D = \begin{vmatrix} 1 & c_1 & c_2 \\ 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Kääntäen viivallinen yhtälöpari (11.1) aina voidaan tulkita koordinaatiston muutoksena, edellyttäen, että $D \neq 0$.

11.2. Affiinit kuvaukset.

Systeemin AG isomorfien kuvausten joukossa ansaitsevat ns. *automorfismit*, AG:n viivalliset kuvaukset *itselleen* erityistä huomiota.

§ 10:stä seuraa, että tällainen automorfismi, missä AG:n piste P kuvautuu AG:n pisteeseen $\bar{P}$ ($P \leftrightarrow \bar{P}$) määräytyy *yksikäsitteisesti*, jos kolmea pistettä P_ν ($\nu = 1, 2, 3$) vastaamaan asetetaan kolme mielivaltaisesti valittua pistettä $\bar{P}_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3$), jotka samoin kuin pisteet P_ν eivät ole samalla suoralla.

Olettakaamme, että $P \leftrightarrow \bar{P}$ on AG:n automorfismi. Silloin P-pisteellä kolmikon (P_1, P_2, P_3) määräämässä koordinaatistossa K on *samat koordinaatit* kuin $\bar{P}$-pisteillä koordinaatistossa $\bar{K}$ ($\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$): $\bar{x} = x, \bar{y} = y$.

Toisaalta siirtyminen koordinaatistosta K koordinaatistoon $\bar{K}$ tapahtuu viivallisilla kaavoilla (11,1) missä (x', y') ja (x, y) ovat *saman pisteen* P koordinaatteja (edelliset K:ssa, jälkimmäiset $\bar{K}$:ssa). Koska affiinissa muunnoksessa (automorfismissa) $P \leftrightarrow \bar{P}$ edellisen pisteen P koordinaatit K:ssa ovat samat kuin kuvapisteen $\bar{P}$ koordinaatit ($\bar{x}$, y) $\bar{K}$:ssa, on $x = \bar{x} = x'$ ja $y = y = y'$, ja muunnoskaavat (11.1) välittävät siis affiinin automorfismin.

Kaavat (11.1) voidaan siis tulkita kahdella tavalla:

1) *Saman* pisteen P koordinaattien muunnoksena, kun siirrytään koordinaatistosta K toiseen K'.

2) Affiinina kuvauksena $P \leftrightarrow P'$, joka sitoo vastinpisteiden koordinaatit *samassa* koordinaatistossa.

Kuvauksen isomorfisuus edellyttää, että determinantti $D = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Jos näin ei ole, kuvaus on »homomorfismi»: se ei ole kääntäen yksikäsitteinen. Jos kaavion aste tällöin on 1, so. $D = 0$, mutta sen alkiot eivät kaikki häviä, kuvautuu affiini taso *suoralle*. Asteen ollessa 0 ($a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$) tason kuva surkastuu pisteeksi ($x' = c_1$, $y' = c_2$).

II KONGRUENSSIOPPI

§ 1. Janojen yhteneväisyys

1.1. Johdatukseksi

Edellä jo useasti mainitussa perustavassa teoksessaan Hilbert [1] esitti janojen ja kulmien yhteneväisyyden eli kongruenssin käsitteet itsenäisinä, insidenssin ja järjestyksen suhteista riippumattomina perussuhteina, jotka noudattavat eräitä, insidenssi- ja järjestyksen aksiomeista samaten riippumattomia kongruenssi-aksiomeja.

Näissä luennoissamme olemme rakentaneet affiinin tasogeometrian insidenssin ja järjestyksen perusrelaatioiden varaan, jotka tyydyttävät kymmenen aksiomia I. 1—5, II. 1—5. Edellä on osoitettu, että näin saatu järjestelmä *AG* (affiinigeometria) täyttää riippumattomuuden ja konsistenssin (ristiriidattomuuden) vaatimukset.

Järjestelmä *AG* on lisäksi *täydellinen*. Sen vuoksi ei ole tarpeellista lisätä siihen uusia riippumattomia *perussuhteita* eikä myöskään uusia *lisäaksiomeja*. Koska järjestelmän looginen rakenne jo on yksikäsitteisesti täysin määrätty (isomorfiaa vaille), sen kaikki lisäkäsitteet on *konstruoitava määritelmien* avulla ja siten palautettava *AG*-järjestelmän pohjana oleviin perusalkioihin (piste, suora), perussuhteisiin (insidenssi, järjestys) sekä perussääntöihin (aksiomit I. 1—5, II. 1—5).

Tämä koskee erityisesti janojen ja kulmien kongruenssin käsitteitä, joiden määrittelylle esillä oleva **II.** luku on omistettu. Asettaessamme näiden *metristen* käsitteiden määritelmiä kongruenssin käsitteeseen liittyvä geometrinen havainto ja sitä koskevat tutut loogiset näkökohdat ohjaavat valintaamme.

1.2. Yhdensuuntaisten janojen kongruenssi

Päästäksemme luontevasti janojen kongruenssin käsitteeseen rajoitamme tarkastelun aluksi *yhdensuuntaisiin* janoihin.

Edellä (§ 8) kahden vektorin identtisyyden käsite on laajennettu niiden yhtäsuuruuden käsitteeksi. Tämä ekvivalenssi perustui paralleelisiirron käsitteeseen: Kaksi vektoria $v_1 = (A_1, B_1)$ ja $v_2 = (A_2, B_2)$, jotka saadaan toisistaan paralleelisiirrolla, määriteltiin yhtäsuuriksi, $v_1 = v_2$. Tämän mukaan vektorien yhtäsuuruus edellyttää, että ne ovat samansuuntaisia. Erityisesti yhtäsuuruudesta $v_1 = v_2$ seuraa, että myös $-v_1 = -v_2$.

Tavoitteenamme on kuitenkin päästä *janojen* (eikä vektorien) yhtäsuuruuden eli kongruenssin käsitteeseen. On luonnollista pitää kahta janaa A_1B_1 ja A_2B_2 yhtä suurena ainakin silloin kun näitä vastaavat vektorit ovat yhtäsuuria, näiden suunnasta riippumatta. Tulemme siten *alustavaan* määritelmään:

Janat $a = A_1B_1$ ja $b = A_2B_2$ ovat kongruentteja, $a = b$, jos ne (sopivasti suunnattuina) vektoreina ovat samansuuruisia.[1]

Näin janojen kongruenssi on määritelty *yhdensuuntaisille* janoille (jolloin janoja pidetään yhdensuuntaisina myös silloin, kun ne ovat saman suoran osia). Tämä kongruenssin käsite (III) tyydyttää vektoriopin nojalla ehdot:

III. 1. *Janojen kongruenssi on ekvivalenssi (se on refleksiivi, symmetrinen ja transitiivi suhde).*

III. 2. *Kolme pistettä A, B, C $(A \neq B)$ olkoon annettu. Silloin puolisäteellä, jonka alkupiste on C ja joka on vektorin (A, B) suuntainen, on täsmälleen yksi piste D, niin että janat AB ja CD ovat kongruentteja.*

1.3. Janojen algebra

Yhdensuuntaisten janojen oppi saadaan vastaavasta vektoriopista samaistamalla kaksi vektoria v_1 ja v_2, jotka ovat vastakkaisia, $v_1 = -v_2$ Tämä identifikaatio vie vektorialgebrasta *yhdensuuntaisten* janojen algebraan. Ilmeisellä tavalla johdetaan tällaisten janojen suuruudenjärjestys, yhteenlasku, vähennyslasku (jolloin janojen a ja b erotus $a - b$ on mielekäs vain kun $a \geqq b$), janan kertominen ja jakaminen positiivisella reaaliluvulla, verrantooppi jne.

---

[1] On siis joko $A_1 B_1 = (A_2, B_2)$ tai $A_1 B_1 = (B_2, A_2)$.

1.4. Janojen kongruenssin yleistäminen. Permanenssin periaate

Siirrymme nyt määrittelemään kahden *mielivaltaisen* (ei enää välttämättä yhdensuuntaisen) janan kongruenssin. Ensimmäiseksi ehdoksi asetamme tällöin, että kongruenssin laajennettukin käsite tyydyttää yllä olevat postulaatit III. 1,2 (jolloin C-pisteestä lähtevän puolisäteen suunta nyt on mielivaltainen).

Tällöin noudatamme ns. »*matemaattisten lakien permanenssin (säilymisen)*» periaatetta, jonka merkitystä matemaattisten käsitteiden kehittelyä ohjaavana ideana tuskin voidaan yliarvioida. Jos jonkin matemaattisen teorian rakenteessa havaitaan joitakin puutteita, esim. niin, että sen säännöt vain tietyin häiritsevin poikkeuksin ovat voimassa, pyritään tällainen looginen kauneusvirhe poistamaan laajentamalla teoriaa, *määrittelemällä* uusia käsitteitä tai uusia alkioita (ns. »ideaaleja elementtejä»), joiden luominen poistaa nuo aikaisemmat puutteet. Tällöin samalla pidetään silmällä »loogisen ekonomian eli säästäväisyyden» periaatetta: Uusia käsitteitä ei lisätä ylenmäärin, vaan tyydytään pienimpään määrään, joka riittää ko. tavoitteen saavuttamiseksi. Tämä *minimivaatimus* rajoittaa laajennusta pitkälle, monasti niinkin, että se *yksikäsitteisesti* määrää, miten laajennus on toimitettava. Siten matemaattiset järjestelmät jo alkuvaiheissaan viitoittavat tien, jota ne myöhemmässä kehityksessään on predestinoitu kulkemaan.[1]

1.5. Postulaatteja III. 1,2 noudattava yleinen janojen kongruenssi

Keskeytämme tähän edellä olevien periaatteellisten näkökohtien tarkastelun ja siirrymme tutkimaan, miten *mielivaltaisten erisuuntaisten janojen kongruenssi on määriteltävä, jotta postulaatit* III. 1, III. 2, *jotka vallitsevat janojen ollessa yhdensuuntaisia, säilyttäisivät pätevyytensä.*

[1] Klassillisen esimerkin näistä periaatteista sisältää lukukäsitteen kehitys: lähtien luonnollisista luvuista 1, 2, . . . lukujen aluetta ja niillä suoritettavia aritmeettisia operaatioita juuri permanenssin periaatetta noudattamalla laajennetaan perättäisesti uusiin »ideaaleihin» lukuihin (nolla, negatiiviset kokonaisluvut, murtoluvut, irrationaaliluvut, kompleksiluvut) ja korkeammassa lukuteoriassa lukuihin, joita juuri nimitetäänkin »ideaaleiksi». Permanenssin periaate ja »ideaalikäsitteiden» alue ei rajoitu vain lukuteoriaan, yhtä tärkeää osaa ne näyttelevät geometriassa, kuten näistäkin luennoista osittain ilmenee. — Ekonomia-periaatteen merkitystä (matemaattisten käsitteiden ulkopuolellakin) filosofi, fyysikko ja fysiologi Ernst Mach erityisesti on korostanut.

Oletamme sitä varten, että janojen kongruenssi jollakin tavoin jo olisi määritelty, siten että: 1) määritelmä pitää yhtä edellä jo asetetun määritelmän kanssa, kun janat erityisesti ovat yhdensuuntaisia; 2) määritelmä toteuttaa postulaatit III. 1 ja III. 2. Mitä tällaisen määritelmän nojalla silloin edelleen voidaan päätellä?

Olkoot A_1B_1 ja A_2B_2 kaksi janaa, jotka kiinnitetyn määritelmän mukaan ovat kongruentteja, $A_1B_1 = A_2B_2$. Valitsemme mielivaltaisen pisteen O ja viedään vektorit (A_1, B_1) ja (A_2, B_2) paralleelisiirrolla asemiin (O, P_1) ja (O, P_2). Postulaattien III. 1.2 mukaan on silloin $OP_1 = OP_2$.

1.6. Mittaviiva

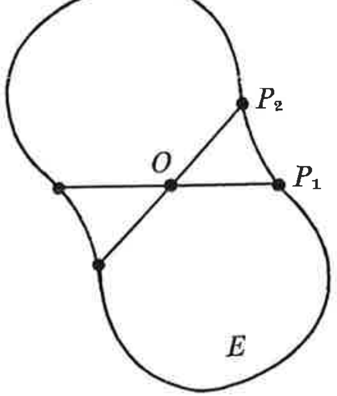
Edellä esitetty tarkastelu osoittaa, että tämän jälkeen voidaan jatkaa janojen kongruenssiopin tarkastelua rajoittumalla janoihin OP, joilla piste O on yhteisenä päätepisteenä. Kiinnitämme tällaisen janan OP_0 mielivaltaisesti ja sen lisäksi jokaisella O:n rajoittamalla puolisäteellä S pisteen P, siten että $OP = OP_0$ (III. 2). Pisteiden (P) joukolla E on silloin ominaisuudet:

1) Jokaisella suoralla L, joka kulkee O-pisteen kautta, on täsmälleen kaksi joukon E pistettä A ja B siten, että $OA = OB = OP_0$. Pisteet A, B ovat O:n suhteen *symmetriset*, so. $(O, B) = -(O, A)$.

2) Jos piste $Q \neq P \in E$ on puolisäteellä OP, on jana $OQ <$ tai $> OP$ sen mukaan, onko OQP tai OPQ. Pistejoukko E on »tähtimäinen»; se erottaa toisistaan edellisen joukon pisteet ja jälkimmäisen joukon pisteet.

Nimitämme pistejoukkoa E »*mittaviivaksi*»; O on sen »keskipiste», keskenään yhtäsuuret janat OP $(P \in E)$ sen »säteitä».

3) Olkoot E_1 ja E_2 ovat samankeskisiä mittaviivoja, joiden säteet ovat $= r_1$ ja $= r_2$. Jos O:sta lähtevät puolisäteet S ja S' leikkaavat mittaviivan E_1 pisteissä P_1 ja P_1', mittaviivan E_2 pisteissä P_2 ja P_2', niin postulaateista III sekä verranto-opista seuraa, että $P_1P_1' \| P_2P_2'$. Kääntäen: jos P_1 ja P_1' ovat mittaviivan E_1 pisteitä $(OP_1 = OP_1' = r_1)$ ja jos OP_1P_2, $OP_1'P_2'$ ja $P_1P_1' \| P_2P_2'$, niin on $OP_2 = OP_2'$, ja pisteet P_2 ja P_2' ovat siis samalla viivalla (E_2).



Kuvio 18.

Edellä esitetystä seuraa, että postulaattimme III. määräämät mittaviivat (E), keskenään ovat »yhdenmuotoisia».

Kääntäen *yhden, tähtimäisen, symmetrisen* pistejoukon E ollessa annettu, janojen kongruenssi on yksikäsitteisesti määrätty ja se tyydyttää postulaatit III. 1,2.[1]

1.7. Metrinen perusfunktio G

Mittaviiva E olkoon annettu. Kahden mielivaltaisen janan a_1 ja a_2 pituuksien suhde $a_1 : a_2$ voidaan määrätä seuraavalla tavalla. Olkoon O pistejoukon E keskipiste. Siirretään janat paralleelisiirrolla asemiin OP_1 ja OP_2. Suhde $OP_1 : OP_2$ on silloin sama kuin janojen r_1 ja r_2 suhde, jotka ovat O-keskisten mittaviivojen E_1 ja E_2 säteinä. Jos nyt valitaan mielivaltainen jana AB ($A \neq B$) mittayksiköksi, jokainen jana saa mittaluvukseen täysin määrätyn positiiviluvun, ja kaksi janaa on yhtäsuurta (kongruenttia) silloin ja vain silloin, kun niiden mittaluvut ovat yhtä suuria.

Vektorimerkintää käyttämällä tulos voidaan lausua seuraavalla tavalla:

[1] Olemme kuviossa esittäneet E-pisteistön *jatkuvana* viivana, mikä ei vielä ole postulaattiemme seuraus. Myöhemmin rajoitamme E-joukkoa tähän suuntaan.

On olemassa vektorien u *metrinen perusfunktio* $G(u)$, joka toteuttaa ehdot:

1°. $G(u) \geqq 0$ ja $= 0$ vain kun $u = 0$;

2°. $G(u)$ on u:n parillinen funktio, $G(u) = G(-u)$;

3°. $G(\lambda u) = |\lambda| G(u)$ (λ reaaliluku);

4°. Vektorin u pituus $|u|$ on

$$|u| = G(u);$$

5°. Funktio G on määrätty positiivista vakinaista reaalikertojaa ϱ vaille. Yksikköjanan valinta kiinnittää vakion ϱ yksikäsitteisesti.

§ 2. Kulmien yhteneväisyys

2.1. Yhdensuuntaiset kulmat

Nimitämme kulmia W ja W', joilla on kärkipisteet O ja O', *yhdensuuntaisiksi*, jos kärkipisteistä lähtevät kulmion kyljet parittain ovat *samansuuntaiset.* Kaksi tällaista kulmaa määritellään kongruenteiksi (yhtä suuriksi), $W = W'$.

Samansuuntaisten kulmien ristikulmat ovat asetetun määritelmän mukaan samansuuntaisina samoin kongruentteja.

Kulman W kyljet olkoot L_1 ja L_2 ja samansuuntaisen kulman W' kylkinä L_1' ja L_2'. Valitsemme kyljillä pisteet $P_1 - L_1$, $P_2 - L_2$, $P_1' - L_1'$, $P_2' - L_2'$, niin että $OP_1 = O'P_1'$, $OP_2 = O'P_2'$. *Desargues'n aksiomista* I. 5 seuraa silloin, että vektorit (P_1, P_2) ja (P_1', P_2') saadaan toisistaan paralleelisiirrolla. *Janat* P_1P_2 *ja* $P_1'P_2'$ *ovat siis kongruentit,* $P_1P_2 = P_1'P_2'$.

2.2. Kulmien kongruenssin yleinen määritelmä

Viimeksi mainittu samansuuntaisten kulmien ominaisuus asetetaan nyt permanenssiperiaatetta noudattaen kahden *mielivaltaisen* kulman yhtäsuuruuden kriteeriksi.

Määritelmä. Olkoot W ja W' kaksi, kulmaa, joiden kärkinä pisteet O ja O' ovat, ja kylkinä puolisäteet L_1, L_2 ja L_1', L_2'.

Olkoon kyljillä annettuna pisteet $P_1 - L_1$, $P_2 - L_2$, $P_1' - L_1'$, $P_2' - L_2'$, siten että $OP_1 = O'P_1'$, $OP_2 = O'P_2'$. Jos tällöin

$$P_1P_2 = P_1'P_2',$$

sanomme kulmia W ja W' yhtä suuriksi (kongruenteiksi).

Täten kulmien kongruenssin käsite on palautettu janojen vastaavaan käsitteeseen.

2.3. Postulaatti III. 3

Asetettu määritelmä on, kuten kohdasta 2.1 ilmenee, riippumaton siitä, miten pisteet P_1 ja P_2 valitaan kyljillä, edellyttäen, että kulmat W ja W' ovat samansuuntaiset.

Mutta onko näin mielivaltaisiin kulmiin W ja W' nähden? Jollei niin ole, kulmien kongruenssin määritelmä ei ole sopiva, sillä se ei silloin määrittele kulmien kongruenssin käsitettä *yksikäsitteisesti.*

Itse asiassa postulaatit III. 1 ja III. 2 eivät vielä riitä tuon yksikäsitteisyyden takaamiseksi. Sen välttämättömänä ja riittävänä ehtona on, että seuraava, janojen kongruenssia koskeva lisäehto on voimassa:

III. 3. *Olkoon pisteillä* O, O', P_ν, P_ν' $(\nu = 1, 2, 3)$ *seuraavat ominaisuudet:*

1°. Pisteet O, P_2, P_3 ja samoin O', P_2', P_3' ovat suoralla viivalla (L ja L').

2°. On $OP_1 = O'P_1'$, $OP_2 = O'P_2'$, $OP_3 = O'P_3'$, $P_1P_2 = P_1'P_2'$.

Silloin on $P_1P_3 = P_1'P_3'$.

Tämä lause pätee, jos kulmat P_1OP_2 ja $P_1'O'P_2'$ ovat samansuuntaiset. Mielivaltaisiin kulmiin nähden se sitä vastoin ei ole voimassa, edellyttäen, että janojen kongruenssista ei vaadita enempää kuin mitä sisältyy postulaatteihin III. 1, 2.

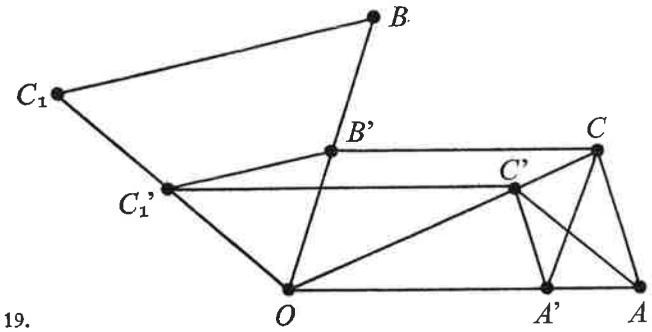
Tulemme siten kysymykseen: Miten postulaatti III. 3, jonka pätevyys on välttämätön ja riittävä ehto kulmien kongruenssin yksikäsitteiseksi määrittelemiseksi, rajoittaa postulaatteja III. 1, 2 ja niistä johdettavan mittaviivan E valintaa?

2.4. Mittaviivan E konstruoiminen postulaatin III. 3 avulla

Seuraavassa tulee osoitettavaksi, että O-keskinen mittaviiva E, eräin rajoituksin, tulee yksikäsitteisesti määrätyksi, jos *mittaviivalla annetaan kolme pistettä.*

Valitsemme sitä varten mielivaltaisen keskipisteen O sekä kolme pistettä A, B, C, joista oletamme, että suorat AB, AC, BC eivät kulje O:n kautta.

Pisteiden A, B, C kautta kulkee ääretön joukko mittaviivoja E, jotka tyydyttävät postulaattien III. 1, 2 vaatimukset. Olkoon E tällainen mittaviiva. Jos nyt vaadimme, että janojen kongruenssi tyydyttää postulaatin III. 3, niin voidaan affiinilla konstruktiolla määrätä neljäs piste C_1, joka samoin sijaitsee viivalla E. Tämä tapahtuu konstruoimalla perättäisesti pisteet A', C', B', C_1' sekä C_1, seuraavalla tavalla (vrt. kuvio 19):



Kuvio 19.

1) $CA' \parallel BO$; 2) $A'C' \parallel AC$; 3) $CB' \parallel A'O$; 4) $C'C_1' \parallel AO$ ja $OC_1' \parallel AC'$; 5) $BC_1 \parallel B'C_1'$.

Todistamme, että piste C_1 täyttää ehdon

$$OC_1 = OA \ (= OB = OC).$$

Koska $A'C \parallel OB$, on olemassa reaaliluku λ ($\neq 0$), niin että $(A', C) : (O, B) = \lambda$, ja siis $A'C = |\lambda| \cdot OB$.

Ehdosta $A'C' \parallel AC$ ja $OA = OC$ seuraa, että $OA' = OC'$.

Kolmioissa OAC' ja OCA' on

$$OA = OC, OC' = OA', C'A' = A'C',$$

ja postulaatin III. 3 mukaan on siis $AC' = CA'$ $(= |\lambda| \cdot OB)$.

(O, C_1') on saatu paralleelisiirrolla vektorista (A, C'), joten $OC_1' = AC' = A'C = |\lambda| \cdot OB$.

Samoin vektori (O, B') saadaan vektorista $(A'C)$ $(= \lambda \cdot (O, B))$ paralleelisiirrolla, joten $OB' = A'C = |\lambda| \cdot OB$. Siis on $OC_1' = OB'$.

Koska $B'C_1' \parallel BC_1$, on $OC_1 : OC_1' = OB : OB'$.

Tästä ynnä kongruenssista $OC_1' = OB'$ seuraa, että $OC_1 = OB$, mistä väitös

$$OC_1 = OA = OB = OC$$

ilmenee. Piste C_1 on siis samalla O-keskisellä mittaviivalla kuin A, B ja C.

2.5. Edellisen konstruktion vektoriesitys

Kiinnitämme nyt affiinin koordinaatiston K, jonka alkupiste on O ja akselivektoreina (O, A) ja (O, B). Pisteiden A ja B koordinaatit ovat silloin $(x = 1, y = 0)$ ja $(x = 0, y = 1)$. C-pisteen koordinaatit olkoot $x = x_0\,(\neq 0)$, $y = y_0\,(\neq 0)$.

Konstruktioiden 2.4 nojalla määrätään tästä edelleen koordinaatit:

$$\begin{aligned}
B' &: x = 0, y = y_0;\\
A' &: x = x_0, y = 0;\\
C' &: x = x_0^2, y = x_0 y_0;\\
C_1' &: x = x_0^2 - 1, y = x_0 y_0;\\
C_1 &: x = \frac{x_0^2 - 1}{y_0}, y = x_0.
\end{aligned}$$

Konstruoitu mittaviivan neljäs piste C_1 saa siis koordinaatit:

$$x_1 = \frac{x_0^2 - 1}{y_0}, \quad y_1 = x_0, \tag{2.5}$$

missä (x_0, y_0) ovat pisteen C koordinaatit.

2.6. Invariantti kvadraattinen muoto

Pisteiden O, A, B, C ollessa annettuja on täysin määrätty neliömuoto (kvadraattinen muoto) $Q(x, y)$, jonka pisteiden A, B, C koordinaatit tekevät luvun 1 arvoiseksi. Jos koordinaatisto K valitaan kuten kohdassa 2.5, tämä kvadraattinen muoto on

$$Q(x, y) = ax^2 - 2cxy + by^2,$$

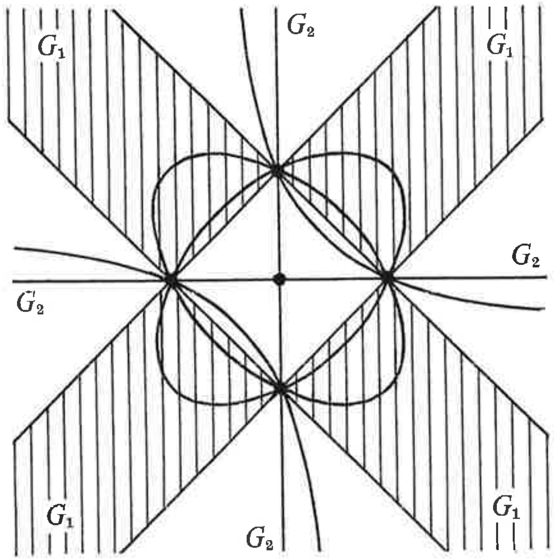
missä

$$a = b = 1,\; c = \frac{x_0^2 + y_0^2 - 1}{2x_0y_0}.$$

Pisteet $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(x_0, y_0)$ sijaitsevat kartioleikkauksella $Q(x, y) = 1$.

Tämä kartioleikkaus on ellipsi, hyperbeli tai kahden yhdensuuntaisen suoran muodostama pari, sen mukaan onko $|c| < 1$, $|c| > 1$ tai $|c| = 1$. Näiden puoliakselit ovat suorien $y \pm x = 0$ suuntaiset, ja niiden pituudet ovat

$$\sqrt{\frac{1}{|1 \pm c|}}.$$



Kuvio 20.

Tapaukset $|c| < 1$, $|c| > 1$, $|c| = 1$ vastaavat edellisellä sivulla olevan kuvion esittämiä vaihtoehtoja pisteen $C(x_0, y_0)$ aseman suhteen.

Jokaisen pisteen $C(x_0, y_0)$ kautta kulkee täsmälleen yksi kartioleikkaus $Q = 1$. Arvoja $|c| < 1$ vastaavat ellipsit, jotka sileästi peittävät neljän, suorien $y - x = \pm 1$, $y + x = \pm 1$ rajoittamien puolivöiden muodostaman alueen G_1 sisäpuolen (kuvion viivoitettu alue!). Hyperbelit ($|c| > 1$) vastaavalla tavalla peittävät alueen G_1 komplementtipisteistön sisäpuolen G_2. Rajatapaus $|c| = 1$ vastaa vihdoin alueiden G_1 ja G_2 yhteisiä rajasuoria $y \pm x = c$ ($c = \pm 1$).

Neliömuoto on ensimmäisessä tapauksessa ($|c| < 1$) positiivisesti definiitti, toisessa tapauksessa ($|c| > 1$) indefiniitti, kolmannessa tapauksessa ($|c| = 1$) semidefiniitti.

2.7. Muodon Q invarianssi transformaation (2.5) suhteen

Sen jälkeen kun neliömuoto $Q = x^2 - 2cxy + y^2$ on otettu käytäntöön, jonka keskipisteenä on origo O ja jota vastaava kartioleikkaus $Q = 1$ kulkee pisteiden $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(x_0, y_0)$ kautta, voidaan konstruoidun pisteen C_1 koordinaatit x_1, y_1 (vrt. 2.5) kirjoittaa yksinkertaisempaan muotoon. Koska $Q(x_0, y_0) = x_0^2 - 2cx_0y_0 + y_0^2 = 1$ ja siis $x_0^2 - 1 = y_0(2cx_0 - y_0)$, saadaan kaavasta (2.5) C_1:n koordinaateille nyt esitykset

$$x_1 = 2cx_0 - y_0, \quad y_1 = x_0. \tag{2.7}$$

Sijoittamalla nämä arvot neliömuotoon $Q(x, y)$ havaitaan, että

$$Q(x_1, y_1) = Q(x_0, y_0).$$

Affiini muunnos (2.7) *säilyttää siis neliömuodon* $Q(x, y)$ *invarianttina.*

Jos mittaviiva E sisältää kolme kartioleikkauksen $Q(x,y) = 1$ pistettä, niin kohdassa 2.4 esitetty konstruktio johtaa neljänteen pisteeseen, jolla on sama ominaisuus.

Tämä tulos näyttää viittaavan siihen, että janojen kongruenssia koskevat postulaatit III. 1, 2, 3, jotka ovat välttämättömiä ja riittäviä mielekkään, kulmien kongruenssia säätelevän määritelmän asettamiseksi, määräävät mittaviivan E, siten että se yhtyy kartioleikkaukseen $Q(x, y) = 1$.

Seuraavassa tulee osoitettavaksi, että tämä olettamus (tietyin lisärajoituksin) on oikea.

§ 3. Euklidinen geometria

3.1. Affiini muunnos T

Tässä §:ssä tutkimme tapausta, jolloin mittaviivan E kolme pistettä A, B, C keskipisteen O suhteen muodostavat *konveksin* (kuperan) kuvion. Tämä sisältää sen, että piste C sijaitsee kuvion alueessa G_1. Yksikkövektorien (O, A), (O, B) virittämässä koordinaatistossa K pisteiden $A, B, C = C(x_0, y_0)$ kautta kulkevan kartioleikkauksen yhtälö on silloin

$$Q(x, y) = x^2 - 2cxy + y^2 = 1, \tag{3.1}$$

missä

$$|c| = \left| \frac{1 - x_0^2 - y_0^2}{2\, x_0 y_0} \right| < 1.$$

Se on *ellipsi*, jonka pääakselit ovat $\dfrac{2}{\sqrt{1 \pm c}}$.

Pisteen C koordinaateista x_0, y_0 saadaan muunnoksella

$$x_1 = 2\, cx_0 - y_0, y_1 = x_0 \tag{T}$$

pisteen C_1 koordinaatit (x_1, y_1). Tämä piste, samoin kuin pisteet A, B, C, sijaitsee jälleen *sekä* mittaviivalla E *että* ellipsillä $Q = 1$.

3.2. Koordinaatisto K_0

Pisteen C_1 aseman tutkimus helpottuu, jos hetkeksi siirrymme uuteen affiiniin koordinaatistoon K_0, jonka x- ja y-koordinaatit saadaan järjestelmän K koordinaateista affiinilla koordinaattimuunnoksella

$$\sqrt{\frac{1+c}{2}}\,(x-y),\quad \sqrt{\frac{1-c}{2}}\,(x+y).$$

Jos yksinkertaisuuden vuoksi merkitään näitäkin uusia koordinaatteja kirjaimilla x ja y, neliömuoto Q uusissa koordinaateissa muuntuu yksinkertaiseksi neliösummaksi

$$Q(x, y) = x^2 + y^2. \tag{3.2}$$

Koordinaatistossa K_0 muunnos (T) on

$$(T)\qquad \begin{cases} x_1 = cx_0 - \sqrt{1-c^2}\cdot y_0, \\ y_1 = \sqrt{1-c^2}\cdot x_0 + cy_0. \end{cases}$$

Se voidaan tulkita (x_0, y_0)-tason »kiertona» pisteen O ympäri, kiertokulman ollessa

$$\alpha = \arccos c \quad (0 < \alpha < \pi).$$

3.3. Muunnoksen T iteraatio

Mittaviivan E pisteistä A, B, C lähtien olemme affiinilla konstruktiolla määränneet neljännen pisteen C_1, joka samoin kuin A, B, C on E:n ja ellipsin $Q = 1$ yhteinen piste. Pidämme nyt pisteet A, B ja O muuttumattomina, mutta vaihdamme C-pisteen pisteeseen $C_1\,(x_1, y_1)$. Toistamalla kohdan 2.5 konstruktion määräämme nyt pisteen $C_2\,(x_2, y_2)$, jonka koordinaatit (x_2, y_2) K-järjestelmässä saadaan muunnoksella

$$x_2 = 2\,cx_1 - y_1,\ y_2 = x_1.$$

K_0-koordinaatistossa piste C_2 saadaan C_1-pisteistä koordinaatiston kierrolla, kulman $\alpha = \arccos c$ $(0 < \alpha < \pi)$ verran, ja C-pisteestä siis kierrolla 2α. Pisteet A, B, C, C_1, C_2 ovat sekä mittaviivalla E että ellipsillä $Q = 1$.

Nyt jatkamme soveltamalla kohdan 2.5 konstruktion perättäisesti pisteisiin $C\,(= C_0), C_1, C_2, \ldots,$ pisteiden A, B ja O pysyessä muuttumattomina. Näin muodostuu pistejono C_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$. Koordinaatistossa K_0 piste C_n saadaan pisteestä $C = C_0$ kierrolla origon O ympäri, kulman $n\cdot\alpha$ verran, missä $\alpha = \arccos c$ $(0 < \alpha < \pi)$. Pisteet

$A, B, C, \ldots, C_n, \ldots$ ovat ellipsin $Q = 1$ ja mittaviivan E *yhteisiä* pisteitä.

Meidän on nyt otettava huomioon kaksi mahdollista vaihtoehtoa:

1°. Kulma $\alpha = \gamma \cdot 2\pi$, missä γ on rationaaliluku $\gamma = \frac{m}{n}$ (m ja n keskenään jaottomia positiivisia kokonaislukuja).

Silloin jono $C_0, C_1, \ldots$ on jaksollinen:

$$C_{\nu+n} = C_\nu \ (\nu = 0, 1, \ldots).$$

Konstruktiomme johtaa siis äärelliseen määrään pisteitä $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$, jotka ovat toisistaan erillisiä.

2°. $\alpha = \gamma \cdot 2\pi$, missä γ on *irrationaaliluku*. Tällöin konstruktiollamme saadaan ääretön joukko erillisiä pisteitä $C_0, C_1, \ldots, C_n, \ldots$

Kaikki pisteet A, B, C_ν ($\nu = 0, 1, \ldots$) ovat mittaviivan E ja ellipsin $Q = 1$ yhteisiä pisteitä.[1] Ne ovat *kaikkialla tiheässä* ellipsillä $Q = 1$.

3.4. Postulaatti III. 4

Edellä asetetut postulaatit III. 1, 2, 3 eivät vielä implikoi mittaviivan *jatkuvuutta*. Tämä ominaisuus on kuitenkin tärkeä tavoitteidemme kannalta. Voisimme tietysti asettaa sen uudeksi, neljänneksi kongruenssipostulaatiksi. Itse asiassa riittää tähän, jos postulaattien III. 1—3 lisäksi vaaditaan vain:

III. 4. Mittaviiva E on rajoitettu, so. E-pisteiden koordinaattien itseisarvojen yläraja on äärellinen.

3.5. Mittaviivan kuperuus ja jatkuvuus

Olemme edellä tutkineet mittaviivaa E postulaattien III. 1, 2, 3 avulla, olettaen että E sisältää *kolme pistettä A, B, C, jotka muodostavat kuperan kuvion keskipisteen O suhteen.* Lisättyämme nyt neljännen postulaatin III. 4 voidaan tämä olettamus *todistaa* oikeaksi postulaattien III. 1—4 nojalla:

[1] Heti nähdään, että myös pisteiden A, B, C_ν *symmetriset* pisteet O:n suhteen täyttävät tämän ehdon.

Lause III. 1. *Mittaviivan kolme mielivaltaista pistettä täyttää kuperuusehdon.*

Jotta esityksemme pääjuoni ei katkeaisi, siirrämme todistuksen myöhempään (§§:n 4 ja 5 alkuun).

Kun mittaviiva lauseen III. 5. mukaan nyt on *kupera* O-pisteen suhteen, päätämme edelleen:

Lause III. 2. *Mittaviiva E on jatkuva.*

Epäjatkuvuuskohdan lähellä olisi, kuten helposti nähdään, kolme E:n pistettä, jotka eivät täyttäisi kuperuusehtoa.

3.6. Mittaviiva E on ellipsi

Postulaattien III. 1, 2, 3 nojalla olemme edellä (kohdassa 3. 3) osoittaneet, että jos $\gamma = \frac{1}{2\pi} \arccos c$ on irrationaaliluku (tapaus 2°), pisteiden A, B, C $(=C_0)$ kautta kulkevan mittaviivan E pisteet ovat kaikkialla tiheässä ellipsillä $Q = 1$. Nyt lisäpostulaatti III. 4 takaa E:n jatkuvuuden. Päätämme tästä, että E *yhtyy* ellipsiin $Q = 1$.

Mutta näin on silloinkin, kun γ on rationaaliluku (tapaus 1°). Kongruenssipostulaatin III. 3 avulla konstruoitu E:n pisteiden, $C_0, C_1, \ldots$ lukumäärä on tosin silloin äärellinen, eikä siitä että ne sijaitsevat ellipsillä $Q = 1$ vielä seuraa, että näin olisi E:n kaikkien pisteiden laita. Tämä ominaisuus kuitenkin seuraa postulaatin III. 4 implikoimasta mittaviivan jatkuvuudesta.

T o d i s t u s. Olkoon E mielivaltainen O-keskinen mittaviiva, joka kulkee pisteiden $A, B, C_0 (= C)$ kautta. Koordinaatistossa K sillä on parametrieritys

$$x = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y = r(\varphi)\sin\varphi, \tag{3.6}$$

missä $r(\varphi)$ (> 0) arvon $\varphi = \varphi_0 = \operatorname{arc\,tg} \frac{y_0}{x_0}$ ympäristössä Φ_0 on φ:n jatkuva funktio (lause III. 2). Pisteen $(x = r(\varphi)\cos\varphi,\ y = r(\varphi)\sin\varphi)$ kautta kulkee täysin määrätty ellipsi

$$Q_c(x, y) = x^2 - 2c\,xy + y^2 = 1; \tag{E$_c$}$$

c:llä on tällöin arvo

$$c = c(\varphi) = \frac{x^2 + y^2 - 1}{2xy} = \frac{(r(\varphi))^2 - 1}{(r(\varphi))^2 \sin 2\varphi},$$

joka välillä Φ_0 on *jatkuva* φ:n funktio.

Samoin on funktion

$$\gamma = \gamma(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \arccos c(\varphi)$$

laita.

Osoitamme, että $c(\varphi)$ ja siis myös $\gamma(\varphi)$ on *vakio*: $\gamma(\varphi) = \gamma(\varphi_0) = \gamma_0$, $c(\varphi) = c(\varphi_0) = c_0$. Jos näet $c(\varphi_1) \neq c(\varphi_0)$ arvolla $\varphi_1 \neq \varphi_0$, joudumme ristiriitaan:

Ensiksi seuraa funktion $\gamma(\varphi)$ jatkuvuudesta välillä (φ_0, φ_1), että siinä on kolmas arvo $\varphi = \varphi_2$, jolla $\gamma_2 = \gamma(\varphi_2)$ on *irrationaaliluku*. Piste

$$(C_2) \qquad x_2 = r(\varphi_2) \cos \varphi_2, \; y_2 = r(\varphi_2) \sin \varphi_2$$

ynnä pisteet A, B määräävät ellipsin $Q_{c_2} = 1$, jolloin $c_2 = \cos(\gamma_2 \cdot 2\pi)$. Koska γ_2 nyt on irrationaaliluku, päätetään kohdan 3.1 mukaan, että annettu mittaviiva E yhtyy ellipsiin $Q_{c_2} = 1$.

Erityisesti siis piste $C = C_0 \in E$ on ellipsillä $Q_{c_2} = 1$. Mutta parametriarvot c vastaavat kääntäen yksikäsitteisesti ellipsejä Q_c. Sen vuoksi on $c_0 = c_2$, $\gamma_0 = \gamma_2$, mikä toisaalta on mahdotonta, koska γ_0 on rationaali-, γ_2 irrationaaliluku.

Tämä ristiriita osoittaa, että funktio $c(\varphi)$ säilyttää *vakioarvon* c_0 mittaviivalla E, joka siis yhtyy ellipsiin $Q_{c_0} = 1$, kuten oli todistettava.

3.7. Euklidinen pituusmetriikka

Edellä on osoitettu, että postulaattien III. 1, 2, 3, 4 ollessa voimassa mittaviiva E on ellipsi. Kääntäen todetaan välittömästi, että jos mittaviivaksi valitaan *mielivaltainen* ellipsi E, neljä postulaattiamme III. 1—4 on voimassa. Tällöin sekä janojen että kulmien kongruenssi tulee täysin määrätyksi.

Olkoon nyt mielivaltaisesti kiinnitetyn O-keskisen ellipsin E yhtälö *mielivaltaisessa* affiinissa koordinaatistossa $K(x, y)$, jonka origona on O-piste,

$$(3.7) \qquad Q(x,y) = ax^2 + 2cxy + by^2 = 1,$$

jolloin Q on positiivisesti definiitti:

$$a > 0, ab - c^2 > 0.$$

Parvi $Q(x,y) = r^2 (r > 0)$ sisältää kaikki E:n kanssa O:n suhteen perspektiiviset mittaviivat. Kaksi janaa OP_1 ja OP_2 on silloin ja vain silloin kongruenttia, kun pisteet $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ toteuttavat ehdon $Q(x_1, y_1) = Q(x_2, y_2)$. Tästä seuraa kahden mielivaltaisen janan P_1P_2 $(P_\nu = P_\nu(x_\nu, y_\nu)$ ja $P_1'P_2'$ $(P_\nu' = P_\nu'(x_\nu', y_\nu'))$ $(\nu = 1, 2)$ kongruens sille $P_1P_2 = P_1'P_2'$ välttämätön ja riittävä ehto

$$(3.7)' \qquad Q(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = Q(x_1' - x_2', y_1' - y_2').$$

Jos mittaviivan E säde, esim. jana $OP \left(P = \left(\frac{1}{\sqrt{a}}, 0\right)\right)$ otetaan pituusyksiköksi, janan P_1P_2 pituuden mittaluvuksi saadaan

$$\overline{P_1P_2} = + \sqrt{Q(x_1 - x_2, y_1 - y_2)}.$$

Tämä pituusmetriikka on riippumaton affiinin koordinaatiston valinnasta. Siirryttäessä koordinaattijärjestelmästä $K(x, y)$ toiseen $\bar{K}(\bar{x}, \bar{y})$ *metrinen neliömuoto* Q jää arvoltaan invariantiksi:

$$Q(x,y) = Q(\bar{x}, \bar{y}).$$

3.8. Ympyränkaaren pituus

Niin kauan kuin ellipsin E_c ja sitä vastaavan positiivisesti definiitin metrisen perusmuodon valinta jätettiin avoimeksi, olimme välttäneet mittaviivan E $(\equiv E_c)$ nimittämistä »*ympyräksi*», koska tämä nimitys olisi voinut johtaa sekaannukseen. Sen jälkeen kun nyt on ilmennyt, että janojen pituusmetriikka postulaattien III. 1, 2, 3, 4 mukaan tulee täysin määrätyksi, jos metriseksi perusmuodoksi otetaan mielivaltainen, koordinaattimuunosten suhteen invariantti, positiivisesti definiitti neliömuoto $Q(x, y)$, käytämme mittaviivasta, ellipsistä $Q = r^2$, tästä lähtien nimitystä »*r-säteinen*, 0-*keskinen ympyrä*».

Ympyrän koordinaattiesityksen saattamiseksi euklidiseen normaalimuotoon, siirrytään »suorakulmaiseen» koordinaatistoon alkeisgeometriasta tunnetulla tavalla. Olkoon annettu metrinen perusmuoto Q, jolla koordinaatistossa $K(x, y)$ on esitys

$$Q(x, y) = ax^2 + 2cxy + by^2 \; (a > 0, ab - c^2 > 0)$$
$$= \frac{1}{a}[(ax + cy)^2 + (ab - c^2)y^2],$$

Siirrytään affiinilla muunnoksella järjestelmään, missä x- ja y-koordinaatit ovat

$$\frac{ax + cy}{\sqrt{a}} \text{ ja } \sqrt{\frac{ab - c^2}{a}} \cdot y.$$

Jos näitä uusia koordinaatteja yksinkertaisuuden vuoksi jälleen merkitään x:llä ja y:llä, invariantti perusmuoto Q saa »pythagoralaisen» normaalimuodon

$$Q(x, y) = x^2 + y^2 \tag{3.8}$$

uudessa järjestelmässä K.

Otamme K:ssa käytäntöön napakoordinaatit (r, φ):

$$\begin{cases} \mathrm{x} = r\cos\varphi, \\ \mathrm{y} = r\sin\varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi) \end{cases} \tag{3.8'}$$

ja siirrymme tarkastamaan ympyränkaaren $Q = 1$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ pituutta. Se määrätään sisäänpiirretyn murtoviivan pituuden raja-arvona kun tämän osajanojen lukumäärää rajatta lisätään niin että niiden pituudet lähenevät nollaa.

Olkoon $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta$. Yksikköympyrällä $x^2 + y^2 = 1$ näitä arvoja vastaavat pisteet $P_\nu(\cos\varphi_\nu, \sin\varphi_\nu)$ $(\nu = 0, \ldots, n)$. Murtoviivan $P_0P_1 \ldots P_n$ pituus on $(x_\nu = \cos\varphi_\nu, y_\nu = \sin\varphi_\nu)$

$$\sum_{\nu-1}^{n} \overline{P_{\nu-1}P_\nu} = \sqrt{\sum_{\nu}^{n} [(x_\nu - x_{\nu-1})^2 + (y_\nu - y_{\nu-1})^2]}.$$

Ympyränkaaren P_0P_n pituus on raja-arvo

$$(3.8)'' \quad s = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} \cdot d\varphi$$

$$= \int_\alpha^\beta d\varphi = \beta - \alpha.$$

3.9. Kulmametriikka

Kulman sisäpuoli määriteltiin kahden kärkipisteestä O lähtevän puolisäteen rajoittamana konveksina pistejoukkona.

Kulman *mittaamiseksi* siirrämme sen ensin paralleelisiirrolla, niin että sen kärkipiste O yhtyy kohdassa 3.2 tarkastetun suorakulmaisen koordinaatiston K_0 alkupisteeseen $x = y = 0$.

Osoitamme, että kaksi tällaista kulmaa on keskenään yhtä suurta silloin ja vain silloin kun niitä vastaavat yksikköympyrän $x^2 + y^2 = 1$ kaaret ovat yhtä pitkät. Todistus voidaan perustaa toisaalta yllä esitettyyn kaaren pituuden määritelmään, toisaalta postulaattiin III. 3. Yksinkertaisemmin se suoritetaan analyyttisesti, lähtien kaavasta (3.8), sekä ympyräviivan parametriesityksestä $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$.

Olkoon kulma $W : \alpha \leq \varphi \leq \beta$. Sitä vastaavaa yksikköympyrän kaarta rajoittavat pisteet ($x_1 = \cos\alpha$, $y_1 = \sin\alpha$) ja ($x_2 = \cos\beta$, $y_2 = \sin\beta$). Kaaren pituus on $\beta - \alpha$, ja $\cos(\beta - \alpha) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta = x_1x_2 + y_1y_2 = 1 - \frac{x_1^2 + y_1^2}{2} - \frac{x_2^2 + y_2^2}{2} + x_1x_2 + y_1y_2$

$= 1 - \frac{1}{2}[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]$, joten

$$(3.9) \qquad \cos(\beta - \alpha) = 1 - \frac{k^2}{2},$$

missä k on pisteitä (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) yhdistävän jänteen pituus.

Olkoon nyt W' toinen keskuskulma: $\alpha' \leq \varphi \leq \beta'$ ($\beta' - \alpha' < \pi$), jonka jänteen pituus on k'. Kaavasta (3.9) seuraa, että $\beta' - \alpha' = \beta - \alpha$ silloin ja vain silloin, kun $k' = k$, mikä juuri oli todistettava.

3.10. Kulmien algebra

Yllä olevan lauseen avulla voidaan kulmien yhteenlasku määritellä yksinkertaisesti siten, että kahden konveksin kulman[1] summa on yhtä suuri kuin keskuskulma, jota vastaava ympyränkaaren pituus on yhteenlaskettavia vastaavien kaarien pituuksien summa.

Tällöin alkuaan vaadittu kulmien konveksius summaan nähden pätee vain, jos yhteenlaskettavien kaarien pituuksien summa jää pienemmäksi kuin π. Tämä rajoitus poistetaan parhaiten siten, että »kulman» käsite ja (K_0-koordinaatistossa) määritelty kulma φ asetetaan käänteisesti yksikäsitteiseen keskinäiseen vastaavuuteen. Jos φ kulkee kaikki reaaliarvot $-\infty$:stä $+\infty$:ään, piste ($x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$) kulkee positiiviseen suuntaan (koordinaatiston K_0 suhteen) yksikköympyrän kehän, ja pisteet (x, y) vastaavat tällöin kääntäen yksikäsitteisesti arvoja φ, modulo 2π. Näin laajennettuna kulmakäsite samalla tulee *suunnatuksi* (orientoiduksi) (koordinaatiston K_0 suhteen). Kun sovitaan siitä, että kulman toinen kylki on sen »alkukylki» ja toinen kylki sen »loppukylki», kulma saa »positiivisen» tai »negatiivisen» suunnan sen mukaan, onko kulmaa vastaavassa välissä $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, ($\varphi_1$ alkukyljen ja φ_2 loppukyljen vastinarvo), tai päinvastoin.

Tämän jälkeen on ilmeistä, miten kulman kertominen mielivaltaisella reaaliluvulla ja jakaminen reaaliluvulla ($\neq 0$) sekä kulmien suhde ja mittaus on määriteltävä.

3.11. Kulmien metriikka mielivaltaisessa koordinaatistossa

Edellä tarkastellussa koordinaatistossa koordinaattiakselit jakavat tason neljään yhtäsuureen kulmaan, mittaluvuiltaan $= \frac{\pi}{2}$. Tällaisessa »ortonormoidussa» koordinaatistossa keskuskulma W, joka vastaa yksikköympyrän $x^2 + y^2 = a^2 = 1$ pisteitä (x_1, y_1), (x_2, y_2) saa mittaluvun

$$\omega = \arccos\,(x_1x_2 + y_1y_2) \pmod{2\pi}.$$

[1] Kulmat oletetaan tällöin siirretyksi yksikköympyrän keskuskulmiksi.

Jos nyt (x_1, y_1), (x_2, y_2) merkitsevät kahden kulman kyljillä olevan *mielivaltaisen* pisteen koordinaatteja, mittaluvun ω lausekkeeksi tulee

$$\omega = \arc\cos \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}} \quad (\mathrm{mod}\ 2\,\pi).$$

Siirrymme nyt ortonomoidusta koordinaatistosta mielivaltaiseen koordinaatistoon, affiinilla muunnoksella

$$x = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \quad y = \gamma\bar{x} + \delta\bar{y} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0).$$

Saadaan silloin

$$Q(x, y) = x^2 + y^2 = \overline{Q}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Tässä $\overline{Q}$ on (positiivisesti definiitti) neliömuoto

$$\overline{Q}(\bar{x}, \bar{y}) = a\bar{x}^2 + 2c\,\bar{x}\bar{y} + b\bar{y}^2,$$

missä

$$a = \alpha^2 + \gamma^2, \quad b = \beta^2 + \delta^2, \quad c = \alpha\beta + \gamma\delta.$$

Vastaava »polarisoitu» muoto on

$$\overline{Q}(\bar{x}_1, \bar{y}_1;\ \bar{x}_2, \bar{y}_2) = a\bar{x}_1\bar{x}_2 + c(\bar{x}_1\bar{y}_2 + \bar{y}_1\bar{x}_2) + b\bar{y}_1\bar{y}_2.$$

Kulman mittaluku on siis

$$\omega = \arc\cos \frac{\overline{Q}(\bar{x}_1, \bar{y}_1; \bar{x}_2, \bar{y}_2)}{\sqrt{\overline{Q}(\bar{x}_1, \bar{y}_1)\,\overline{Q}(\bar{x}_2, \bar{y}_2)}}.$$

3.12. Metriset perusmuodot vektorimuodossa

Kohdassa 1.7 olemme, nojaten pelkästään kongruenssipostulaatteihin III. 1 ja III. 2, palauttaneet janojen pituusmittauksen vektorifunktioon $G(u) \geqq 0$. Sen jälkeen kun mielivaltainen pituusyksikkö on valittu, vektorin u pituus $|u|$ on

$$|u| = G(u).$$

Edellä on osoitettu, että jos postulaattien III. 1,2 lisäksi asetetaan kulmien kongruenssikäsitteen mielekästä määritelmää varten tarvittava postulaatti III. 3 sekä vaatimus III. 4, funktio $(G(u))^2$ tällöin on positiivisesti määrätty neliömuoto. Kääntäen jokainen tällainen neliömuoto johtaa metriikkaan, joka tyydyttää kongruenssipostulaatit III. 1—4.

3.13. Kolmioepäyhtälö

Euklidisessa tapauksessa mittaviiva (»ympyrä»)

$$G(u) = \text{vakio}$$

on konveksi. Tämä ominaisuus voidaan lausua toisinkin, metrisen perusmuodon G ominaisuutena, *riippumatta* metrisistä postulaateista III. 3 ja III. 4.

Affiinista geometriasta sekä kongruenssipostulaateista III. 1,2 seuraa, kuten kohdassa 1.7 on osoitettu, että mittaviivaksi E voidaan ottaa yhtälön $G(u) = \text{vakio}$ määrämä pistejoukko, missä reaalifunktio G täyttää ehdot: 1) $G(u) > 0$, kun vektori $u \neq 0$; 2) Jos λ on mielivaltainen reaaliluku, on $G(\lambda u) = |\lambda|\, G(u)$.

Olkoot nyt u ja v mielivaltaisia vektoreja ($\neq 0$), $|u| = G(u)$, $|v| = G(v)$ ja siis $G\left(\frac{u}{|u|}\right) = \frac{1}{|u|} G(u) = 1$, $G\left(\frac{v}{|v|}\right) = 1$. Jos vektorit u, v siirretään yhdensuuntaisesti alkupisteeseen 0, niin vektorien $\bar{u} = \frac{u}{|u|}$ ja $\bar{v} = \frac{v}{|v|}$ loppupisteet ovat O-keskisellä mittaviivalla E. Tämän viivan konveksius sisältää sen, että piste $P \in E$, joka on konveksissa kulmassa AOB, $(O, A) = \bar{u}$, $(O, B) = \bar{v}$, sijaitsee niin, että säde OP leikkaa jänteen AB pisteessä $\bar{P}$, joka on O:n ja P:n *välissä* ($O\bar{P}P$). Koska OP:n pituus on 1, on vektorin $w = (O, \bar{P})$ pituus $|w| = G(w) < 1$

Kirjoitetaan nyt $w = \lambda\bar{u} + \mu\bar{v} = \frac{\lambda}{|u|} u + \frac{\mu}{|v|} v$ $(0 < \lambda < 1, \lambda + \mu = 1)$ ja valitaan P niin, että $\frac{\lambda}{|u|} = \frac{\mu}{|v|} = \frac{1-\lambda}{|v|}$. Silloin

$$\lambda = \frac{|u|}{|u| + |v|}, \quad \mu = \frac{|v|}{|u| + |v|}$$

ja siis

$$1 > |w| = G\left(\frac{u+v}{|u|+|v|}\right) = \frac{|u+v|}{|u|+|v|}.$$

Tästä seuraa *kolmioepäyhtälö*

(3.13) $$G(u+v) < G(u) + G(v),$$

missä vektorit u, v ovat viivallisesti riippumattomia.

Jos sitä vastoin u ja v ovat viivallisesti riippuvia ja samansuuntaisia, on

(3.13)' $$G(u+v) = G(u) + G(v),$$

kuten G:n homogeenisuudesta välittömästi seuraa.

Konveksi mittaviiva E ja siitä johtuva *kolmioepäyhtälö* muodostavat geometrisen järjestelmän perustan, jonka Minkowski [1] vuonna 1910 esitti.[1]

3.14. Skalaaritulo

Jos postulaatit III. 1.2 täydennetään lisävaatimuksilla III. 3 ja III. 4 johdutaan *euklidiseen* geometriaan. Metrillinen perusfunktio $[G(u)]^2$ supistuu tällöin positiivisesti määrätyksi neliömuodoksi $Q(u)$. Sitä vastaava polarisoitu bilineaarimuoto

$$Q(u, v) = \tfrac{1}{2}\,[Q(u+v) - Q(u) - Q(v)],$$

on u:n ja v:n suhteen symmetrinen: $Q(u, v) = Q(v, u)$. Kääntäen: jos tällainen bilineaarimuoto on annettu, niin $Q(u) \equiv Q(u,u)$ on neliömuoto. Tarkasteltavana olevassa tapauksessa on silloin $|u| = G(u) = +\sqrt{Q(u)}$.

Euklidinen metriikka on siis täysin määrätty, kun vektorien u, v »skalaaritulo» $Q(u, v)$ on annettu, seuraavin ominaisuuksin:

III.a. $Q(u, v)$ on reaaliarvoinen, symmetrinen ja viivallinen vektorien u, v funktio.

---

[1] Tätä »Minkowskin geometriaa» ei ole sekoitettava Lorentzin ja Minkowski-Einsteinin (indefiniittiseen) geometriaan, josta §:ssä 4 tulee puhe.

III. b. Vastaava neliömuoto $(G(u))^2 = Q(u,u)$ on positiivisesti määrätty.

Vektorin u pituus on silloin

$$|u| = +\sqrt{Q(u, u)} = G(u),$$

ja vektorien välisen kulman $[u, v]$ mittaluku määräytyy kaavasta

$$\cos [u, v] = \frac{Q(u, v)}{\sqrt{Q(u, u)} \cdot \sqrt{Q(v, v)}}.$$

Postulaateista III. a, III. b seuraa *kolmioepäyhtälö* $|u + v| \leq |u| + |v|$ ja tästä edelleen *Schwarzin epäyhtälö*

$$|Q(u, v)|^2 \leq Q(u, u) \cdot Q(v, v),$$

mistä ilmenee, että yllä olevan kaavan mukainen kulman mitta, luku $[u, v]$ on *reaaliluku*.

Kahden vektorin u, v *kohtisuoruuden* eli *ortogonaalisuuden* ehtona on $Q(u, v) = 0$.

Vektoripari e_1, e_2, joka tyydyttää ehdot

$$Q(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ kun } i = j, \\ 0, \text{ kun } i \neq j, \end{cases}$$

virittää *ortonormoidun (suorakulmaisen* eli *karteesilaisen)* koordinaatiston.

Täten olemme lähtien kymmenestä aksiomista I. 1—5, II. 1—5 rakentaneet monomorfin affiinin tasogeometrian. Lisäämällä neljä kongruenssipostulaattia III. 1—4 on tämä järjestelmä metrisoitu *euklidiseksi geometriaksi* ja sitä vastaavaksi (kaksiulotteiseksi) *viivallisen algebran* euklidiseksi järjestelmäksi.

§ 4. Lorentz-Minkowskin geometria

4.1. Hyperbolinen tapaus

Postulaatit III. 1, 2 jättävät mittaviivan E ja sitä vastaavan metrisen perusfunktion $G(u)$ kiinnittämisen pitkälle mielivaltaiseksi (vrt. 1.7).

Kulmien metriikan asettamiseksi oli välttämätöntä täydentää kongruenssipostulaatteja kolmannella vaatimuksella III.3. Näillä edellytyksillä tutkimme mittaviivaa E, joka kulkee kolmen annetun pisteen A, B, C kautta. Osoittautui, että C:n sijaitessa kulmassa AOB (O on E:n keskipiste) siten, että C-piste on kolmion AOB ulkopuolella (»konveksi» eli »kupera» tapaus), tällainen mittaviiva E, joka lisäksi on *rajoitettu* (postulaatti III. 4), yhtyy täysin määrättyyn *ellipsiin*, jonka keskipisteenä on O ja joka kulkee A-, B- ja C-pisteiden kautta.

Päättelyyn jäi kohdassa 3.5 kuitenkin aukko: lauseen III. 1 todistus postulaattien III. 1—4 avulla. Seuraavassa näytämme, että jos mittaviiva E, jonka keskipisteenä on O, kulkee pisteiden A ja B kautta, kulman AOB ollessa kovera, niin kulman sisällä olevat E:n pisteen C sijaitsevat kolmion AOB *ulkopuolella;* kuvio ACB on siis tässä *ankarassa mielessä kupera* O:n suhteen.

Todistus tapahtuu epäsuorasti. Oletamme sitä varten ensiksi, että kuvio ACB on *kovera* O:n suhteen: piste C on kolmion AOB *sisäpuolella.* Tästä ynnä neljästä postulaatista III. 1—4 johdetaan ristiriita, joten antiteesi on hylättävä. Jäljelle jää vain mahdollisuus, että piste C sijaitsee joko kolmion AOB ulkopuolella *tai* sivulla AB. Seuraavan pykälän alussa todistetaan, että jälkimmäinenkin vaihtoehto ristiriitaisena on suljettava pois, ja siten lauseen III. 1. todistus on viety loppuun.

Tämä todistus ei ole aivan lyhyt. Sen merkitystä lisää kuitenkin se, että siinä suoritettavat tarkastelut johtavat, paitsi todistettavaan lauseeseen III. 1, tuloksiin jotka sinänsä alkeisgeometrian tutkimuksen kannalta ovat kiintoisia. Siirrymme nyt todistukseen.

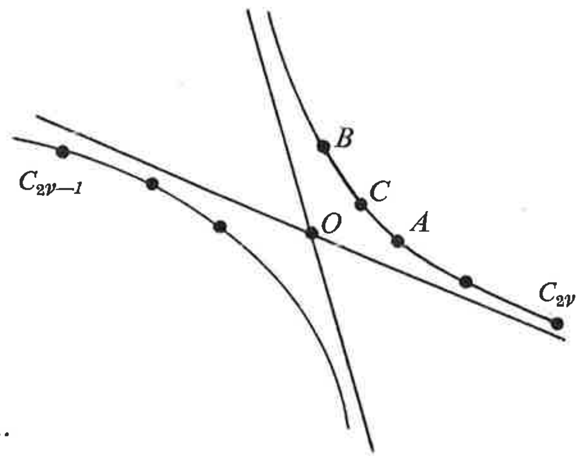
Vasta-oletuksen vallitessa (»ACB on kovera O:n suhteen») asetetaan ko. kolmen pisteen kautta kulkeva hyperbeli H_c

$$(4.1) \qquad Q = x^2 - 2cxy + y^2 = 1 \quad (|c| > 1)$$

(vrt. 2.6 ja 2.7), ja johdutaan käyttämällä postulaattia III. 3 perättäisesti pisteisiin $C_0 (= C)$, $C_1, \ldots, C_n, \ldots$, jotka kaikki ovat sekä hyperbelillä (4.1) että mittaviivalla E. Kuten § 3:ssä, joka oli omistettu tapaukselle $|c| < 1$, tutkimme nyt pisteiden C_ν ($\nu = 0, 1, \ldots$) jakautumista hyperbelillä (4.1).

4.2. Pistejono C_ν

Merkitään C_ν:n koordinaatteja K-koordinaatistossa kirjaimilla x_ν, y_ν, jolloin $C_0 = C_0 \quad (x_0, \ y_0)$ ja vakio $c = \dfrac{-1 + x_0^2 + y_0^2}{2x_0 y_0} (|c| > 1)$.



Kuvio 21.

Pisteiden A (1,0), B (0,1) ja C (x_0, y_0) kautta kulkevalla hyperbelillä (4.1), jota merkitsemme H_c:llä, on asymptootit

$$y = (c \pm \sqrt{c^2 - 1})\, x.$$

Pisteet C_ν $(x_\nu, \ y_\nu)$ määräytyvät rekursiivisesti transformaatioilla (vrt. 3.1)

$$(T) \qquad x_\nu = 2cx_{\nu-1} - y_{\nu-1}, \ y_\nu = x_{\nu-1} \ (\nu = 1, 2, \ldots).$$

4.3. Koordinaatisto K_0

Kuten elliptisessä tapauksessa ($|c| < 1$) on tapauksessa $|c| > 1$ sopivaa siirtyä yllä olevasta koordinaatistosta K uuteen affiiniin koordinaatistoon K_0, missä nyt otetaan entisten koordinaattien funktiot

$$x - cy \text{ ja } \sqrt{c^2 - 1}\, y$$

uusiksi koordinaateiksi. Jos näin saadun K_0-koordinaatiston koordinaatteja yksinkertaisuuden vuoksi jälleen merkitään x:llä ja y:llä, hyperbeli H_c nyt saa yhtälön

$$x^2 - y^2 = 1. \tag{4.4}$$

Tällöin transformaatio (T) on

$$(T_0) \qquad \begin{cases} x_1 = cx + \sqrt{c^2 - 1} \cdot y, \\ y_1 = \sqrt{c^2 - 1} \cdot x + cy. \end{cases} \qquad (c < -1)$$

Piste A saa koordinaatit $(1, 0)$ ja piste B koordinaatit $(-c, \sqrt{c^2 - 1})$ Kirjoitamme nyt

$$c = -\cosh\alpha$$

sekä hyperbelin H_c yhtälön parametrimuotoon

$$x = \cosh\varphi,\ y = -\sinh\varphi,$$

hyperbelifunktioiden

$$\cosh\varphi = \tfrac{1}{2}(e^{\varphi} + e^{-\varphi}),\ \sinh\varphi = \tfrac{1}{2}(e^{\varphi} - e^{-\varphi})$$

avulla. Transformaatio (T_0) on silloin

$$(T_0) \qquad \begin{cases} x_1 = -\cosh\alpha\cosh\varphi - \sinh\alpha\sinh\varphi, \\ y_1 = \sinh\alpha\cosh\varphi + \cosh\alpha\sinh\varphi. \end{cases}$$

Pisteiden C_n $(n = 0, 1, 2, \ldots; C_0 = C)$ koordinaatit ovat

$$x_n = (-1)^n\cosh(\varphi + n\alpha),\ y_n = (-1)^n\sinh(\varphi + n\alpha).$$

Ne sijaitsevat vuorotellen hyperbelin H_c oikealla haaralla (n parillinen) ja vasemmalla haaralla (n pariton), niin että

$$x_{2n} \to +\infty,\ x_{2n+1} \to -\infty, \text{ kun } n \to \infty.$$

Mutta tämä sisältää ristiriidan: antiteesista, kuvion ACB koveruudesta kärkipisteen O suhteen, seuraa postulaattien III. 1, 2, 3 nojalla, että mittaviiva E, joka kulkee pisteiden A, B, C kautta, sisältää pisteitä, jotka kasaantuvat äärettömän kauas, vastoin postulaatin III. 4 vaatimusta.

Päätämme siis, että mittaviivan mielivaltainen pistekolmikko ei voi olla kovera O-pisteen suhteen. Lauseen III. 5 täydelliseksi todistamiseksi on vielä näytettävä, etteivät kolme E:n pistettä voi sijaita samalla suoralla. Tämä todistus siirretään §:n 5 alkuun.

4.4. Kongruenssikäsitteen laajennus. Kongruenssiluokat

Mittaviivan E ominaisuudet III. 1—4 johtavat euklidiseen geometriaan, jolloin E on ellipsi. Edellä suoritettu »koveraa» tapausta koskeva tarkastelu (4.3) antaa affiinin geometrian metrisoimisprobleemaan lisävalaistusta toiseenkin suuntaan. Koska postulaatit III. 1—4 implikoivat mittaviivan kuperuuden, on meidän päästäksemme käsiksi *koveriinkin mittaviivoihin* muunnettava kongruenssipostulaatteja III. Tämä tapahtuu luonnollisella tavalla siten, että *erisuuntaisten* janojen kongruenssin suhde määritellään vain tietyille janoille, joiden suunnat rajoitetaan, jakamalla ne »kongruenssiluokkiin». Vastaavasti kongruenssipostulaatit III rajoitetaan, niin että niissä esiintyvät kongruenssit koskevat vain *samaan* luokkaan kuuluvia janoja.[1]

Mittaviivan tutkiminen tällaisilla edellytyksillä on mutkikas tehtävä. Tyydymme tarkastamaan kysymystä eräin yksinkertaisin lisäoletuksin. Säilytämme, mitä kongruenssiopissa alustavasti on esitetty *yhdensuuntaisten* janojen yhteneväisyydestä (nimenomaan sen, että paralleelisiirroilla toisistaan saadut vektorit määritellään keskenään kongruenteiksi). Kongruenssioppi palautuu silloin, kuten edelläkin, mittaviivan tutkimiseen, jonka keskipisteenä on mielivaltaisesti kiinnitetty piste O.

Sen lisäksi oletamme, että taso on jaettu äärelliseen määrään $n \geqq 1$ ristikulmapareja R, jotka ovat keskenään pistevieraita ja joita rajoittavat yhteisen kärjen O kautta kulkevat suorat. Kongruenssiluokkina ovat saman ristikulmaparin *sisällä* kulkevien suorien suuntaiset janat. Kylkien suuntaiset janat jätetään (ainakin aluksi) kongruenssiopin ulkopuolelle.

[1] Zürichin yliopistossa pitämiini luentoihin liittyen on W. Senft [1] väitöskirjassaan tutkinut kongruenssiluokkien oppia.

Kokoamme vielä aksiomit III sellaiseen muotoon, jota seuraavassa käytämme.

Postulaatti III. 1. Sen vaatima kongruenssin ekvivalenssiominaisuudet rajoitetaan koskemaan *samaan* ristikulmapariin R kuuluvia (ja niiden kanssa samansuuntaisia) janoja.

Postulaatti III. 2. rajoitetaan samoin koskemaan samaan ekvivalenssiluokkaan R kuuluvia janoja.

Postulaatti III. 3 säilytetään, mutta siinä mainitut kongruenssit on edellisten postulaattien mukaan vastaavasti rajoitettava, siten että ko. kongruenssit koskevat vain samaan kongruenssiluokkaan R kuuluvia janoja.

Postulaatti III. 4. Muunnetaan siten, että siinä esitetty vaatimus koskee kunkin kulman R osakulmia R', jotka *rajasäteineen* sisältyvät R :ään. Jokainen E-viivan osapisteistö $E' \subset R'$ on *rajoitettu.*

Tätä vaatimusta ei siis nyt aseteta *koko* kaareen $E \subset R$ nähden; R-luokkien rajasäteiden ympäristöt jäävät tässä suhteessa poikkeusasemaan.

4.5. Tapaus n = 2

Kongruenssiopin konstruktio kongruenssiluokkien lukumäärän n ollessa > 2 ei ole aivan yksinkertainen tehtävä, eikä se myöskään johda niin kiinnostaviin tuloksiin kuin tapauksissa $n = 2$ ja $n = 1$. Tässä jaksossa (§ 4) tutkimme tapausta $n = 2$, jolloin ristikulmaparit R ja $\bar{R}$ (ynnä niiden kyljet) yhdessä peittävät koko tason.

Varsinaisesti uutta k.o.tapaus ($n = 2$) tuo vain mittaviivan E koostuessa *koverista* kaarista.

4.6. Koverat mittaviivat

Edellä mainituilla edellytyksillä voidaan tutkia mittaviivan kaarien koveruutta käyttämällä postulaattia III. 3 sekä siihen pohjautuvaa iteraatiomenettelyä. Jos kongruenssiluokan R kolmeen janaan OA, OB, OC sovelletaan postulaattia III. 3, kuten kohdissa § 2 (2.4) ja § 4

(4.2),[1] ilmenee, että iteroimalla saadut mittaviivan pisteet C_ν sijaitsevat hyperbelillä H, jonka keskipisteenä on O ja joka kulkee annettujen pisteiden A, B, C kautta. Menettelyä voi jatkaa, niin kauan kuin konstruoidut pisteet $C_1, C_2, \ldots$ sijaitsevat ristikulmissa R.

Postulaatin III. 4 nojalla päätämme nyt: hyperbelin H *asymptootit eivät kulje ristikulmaparissa* R. Sillä jos niin olisi, silloin pisteet C_ν ($\nu = 0, 1, \ldots$), jotka ovat mittaviivalla, ν:n rajatta kasvaessa kasautuisivat äärettömän kauas, mikä sotii postulaattia III. 4 vastaan (vrt. 4.2).

Edellä olemme (postulaattien III. ohella) lähteneet olettamuksesta, että jommassakummassa ristikulmaparin R (R_1, R_2) kulmista[2] on kolme pistettä A, B, C, jotka O:n suhteen muodostavat *koveran* kuvion. Itse asiassa tämä ehto tällöin pitää paikkansa R_1:n ja R_2:n *mielivaltaisiin* pistekolmikkoihin nähden. Todistus voidaan suorittaa samaan tapaan kuin vastaava kohta kuperuuden tapauksessa, emmekä siihen tässä lähemmin puutu.

Ristikulmissa R kulkevat mittaviivan kaaret ovat siis koveria ja sen vuoksi *jatkuvia*.

Tästä seuraa edelleen, että E-kaaret ristikulmaparissa R sijaitsevat samalla hyperbelillä H, jonka kolme E-kaaren pistettä sekä keskipiste O määräävät.[3] Postulaatin III. 4 mukaan hyperbelin H asymptootit eivät kulje kulmaparin R sisällä. Seuraavassa osoitetaan, että ne *yhtyvät R-kulman kylkiin*.

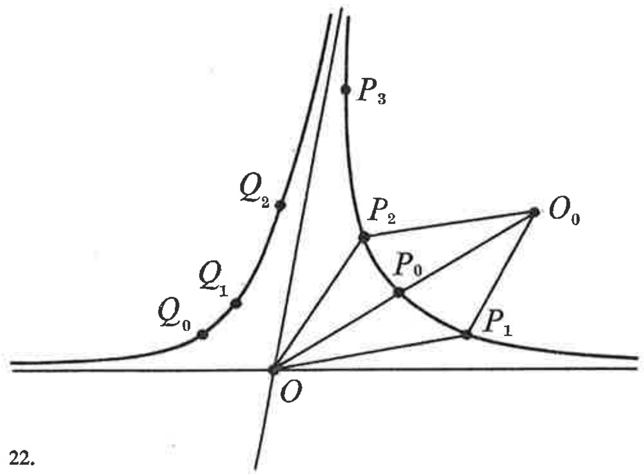
4.7. R:n komplementti $\bar{R}$

Viimeksi esitetyn väitteen todistamiseksi on katsottava, mitä (muunnetuista) postulaateista III. 1—4 seuraa mittaviivan kaarien $\bar{E}$ suhteen, jotka kulkevat R:n komplementtialueella $\bar{R}$. Ensiksi päätämme, samoin kuin E:hen nähden, että myös $\bar{E}$:n pisteet sijaitsevat tietyllä O-keskisellä hyperbelillä $\bar{H}$, jonka asymptootit *eivät kulje kulmaparin $\bar{R}$ sisällä*. Todistamme nyt:

[1] On huomattava, että ko. menettely tällöin rajoittuu janoihin, jotka kuuluvat *samaan* kongruenssiluokkaan (R). Muunnettua postulaattia III. 3 on siis lupa käyttää.
[2] E:n symmetrian vuoksi silloin molemmissa kulmissa R_1 ja R_2.
[3] Tämä seuraa helposti postulaatista III. 4.

Lause 4. 7. *$\bar{H}$ on hyperbelin H liitto- eli konjugaattihyperbeli.*

Todistus voitaisiin perustaa kohdan 4.3 tarkasteluun, mutta suoritetaan siitä riippumatta esimerkiksi näin:



Kuvio 22.

Hyperbelin H kaaren E pisteet P_0, P_1, P_2 valitaan niin, että OP_0 on suunnikkaan $OP_1O_0P_2$ lävistäjän OO_0 osana. Kolmioiden OP_1O_0 ja OP_2O_0 sivut OP_1, OP_2, P_1O_0, P_2O_0 kuuluvat luokkaan R ja ne ovat kaikki keskenään kongruentteja. Janat P_1P_0 ja P_0P_2 taas kuuluvat luokkaan $\bar{R}$, ja soveltamalla postulaattia III. 3 päätellään, että nekin ovat keskenään kongruentteja. Siirretään ne nyt yhdensuuntaisesti asemiin OQ_0, OQ_1. Tällöin ne edelleen kuuluvat luokkaan $\bar{R}$, ollen siinä kongruentteja. Pisteet Q_1 ja Q_0 sijaitsevat siis samalla hyperbelillä $\bar{H}_1$, joka on $\bar{H}$-hyperbelin kanssa perspektiivisessa asemassa keskipisteen O suhteen.

Toisaalta pisteiden Q_0 ja Q_1 konstruktiosta seuraa, että ne sijaitsevat hyperbelin H *konjugaattihyperbelin* H^* kanssa perspektiivisessä asemassa olevalla hyperbelillä H_1^*.[1]

[1] Tämä todistetaan yksinkertaisesti laskennollisesti. Sitä varten on mukava valita H:n asymptootit koordinaattiakseleiksi. Tällaisessa koordinaatistossa H saa yhtälön $x^2 - y^2 =$ vakio. Seuraamalla konstruktiota todetaan, että pisteiden Q_0 ja Q_1 koordinaatit samoin tekevät lausekkeen $x^2 - y^2$ samanarvoisiksi, mistä väitös ilmenee.

Jatketaan nyt konstruktiota, vaihtamalla pistekolmikko $P_1P_0P_2$ pistekolmikoksi $P_0P_2P_3$, jolloin nyt janat OP_0 ja OP_3 vuorostaan ovat suunnikkaan sivuja ja OP_2 tämän lävistäjän osana. (Jos pisteet P_1, P_2 on valittu tarpeeksi läheltä toisiaan kaarella E, niin myös piste P_3 sijaitsee tällä kaarella). Siirretään nyt jana P_2P_3 yhdensuuntaisesti asemaan OQ_2. Näin on saatu kolme pistettä Q_0, Q_1, Q_2, jotka kaikki sijaitsevat hyperbelillä $\overline{H}_1$ mutta myös hyperbelillä H_1^*. Mutta kolme pistettä määrää yksikäsitteisesti O-keskisen hyperbelin, joten hyperbelit $\overline{H}_1$ ja H_1^* *yhtyvät*. Tästä seuraa, että niillä ja siis myös hyperbeleillä H ja $\overline{H}$ on samat asymptootit.

Toisaalta H:n asymptootit, jotka ovat samat kuin liittohyperbelin H^*:n, *eivät kulje* ristikulmaparin R sisällä, eivätkä $\overline{H}$:n asymptootit $\overline{R}$-kulmien sisällä. Mutta näin voi olla vain silloin kun k.o. asymptootit *yhtyvät* R:n kylkiin. Postulaateista III. 4 seuraa edelleen, että kaaret E käsittävät *koko* hyperbelin H ja kaaret $\overline{E}$ samoin koko hyperbelin $\overline{H}$ (jolla on samat asymptootit kuin hyperbelillä H). Valitsemalla pituusyksikkö luokassa $\overline{R}$ sopivasti saadaan aikaan, että mittaviiva $\overline{E}$ yhtyy mittaviivan $E \equiv H$ konjugaattihyperbeliin H^*. Lauseen todistus on siten suoritettu loppuun.

4.8. Lorentz-Minkowskin geometria

Edellä esitetyllä tavalla metrisoitua affiinia geometriaa nimitämme *Lorentz-Minkowskin geometriaksi*, koska se, fysikaalisesti tulkittuna, on yhtäpitävä Einsteinin erikoisen suhteellisuusteorian kinematiikan ja sen perustana olevien Lorentzin [1] transformaatiokaavojen tulkinnan kanssa, minkä Minkowski [2] v. 1905 esitti.[1] Tähän tulkintaan palaamme tämän luvun kohdassa 4.13.

Ko. geometriaan olemme tulleet olettamalla, että kongruenssiluokkia on *kaksi* (ristikulmaparit R ja $\overline{R}$). Postulaateista III. 1—4 seurasi, että mittaviivat (E ja $\overline{E}$) ovat hyperbeleitä (H ja $\overline{H}$), joiden yhteiset asymptootit rajoittavat kulmia R ja $\overline{R}$. Tällöin nämä rajasuorat jäävät metrisoimatta.

[1] Tätä teoriaa ei ole sekoitettava geometriaan, minkä Minkowski aikaisemmin oli esittänyt, kuten näiden luentojen kohdassa 3.13 on mainittu.

Jos kiinnitetään mielivaltainen affiini koordinaatisto $K(x, y)$, jonka alkupiste sijoitetaan kulmien R ja $\bar{R}$ kärkipisteeseen O, r-säteiset mittaviivat saadaan yhtälöstä

$$Q(x, y) = ax^2 + 2cxy + by^2 = \pm r^2 = \text{vakio},$$

jolloin Q on *indefiniitti neliömuoto*, ja siis determinantti $ab - c^2 < 0$. Asymptoottien yhtälöt ovat: $Q(x, y) = 0$.

Jos janan päätepisteinä ovat $P_1(x_1, y_1)$ ja $P_2(x_2, y_2)$, niin janan pituudeksi saadaan

$$\overline{P_1P_2} = +\sqrt{|Q(x_1 - x_2, y_1 - y_2)|}.$$

Tämä metriikka on riippumaton affiinin koordinaatiston K valinnasta, samoin kuin euklidisessa geometriassa oli laita. Siirryttäessä järjestelmästä $K(x, y)$ toiseen $\bar{K}(\bar{x}, \bar{y})$ jää metrinen perusmuoto arvoltaan invariantiksi:

$$Q(x, y) = Q(\bar{x}, \bar{y}).$$

Muoto Q häviää mittahyperbelien asymptooteilla. Jos nämäkin halutaan metrisoida, on niiden suuntaisille janoille luonnollista säilyttää edellä saatu arvo. Ne saavat siis mittaluvuikseen arvon 0.[1]

Helposti todetaan, että kääntäen näin määritelty Lorentz-Minkowskimetriikka tyydyttää kaikki vaatimukset III. 1—4.

4.9. Mittaviivan kaarenpituus ja kulmien mittaus

Edellisestä ilmenee, että Lorentz-Minkowskin geometrian metriikka noudattaa samankaltaisia sääntöjä kuin euklidinen geometria; ne poikkeavat toisistaan vain siinä, että metrinen perusmuoto Q jälkimmäisessä tapauksessa on definiitti, edellisessä indefiniitti, jolloin sen merkki $\pm$ määrää kaksi kongruenssiluokkaa.

Näiden geometristen järjestelmien keskinäinen analogia säilyy myös *kulmien* kongruenssiopissa.

Kuten euklidisessa tapauksessa Lorentz-Minkowskin geometriassa kulmien kongruenssioppi liittyy mittaviivan (E) tai $(\bar{E})$ kaarenpituuden

[1] Tosin ne (erikseen) voidaan metrisoida toisinkin, koska *saman* suoran osajanat voidaan mitata mielivaltaista samansuuntaista yksikköä käyttämällä.

määräämiseen. Tämä määritellään jälleen kaaren sisään piirretyn murtoviivan pituuden raja-arvona. Tehtävä yksinkertaistuu, jos aluksi siirrytään koordinaatistoon K_0, missä Q saa muodon $Q = x^2 - y^2$. Oikeanpuolinen hyperbelin E ($Q = 1$) haara esitetään parametrimuodossa

$$\begin{cases} x = \cosh\varphi = \frac{1}{2}(e^{\varphi} + e^{-\varphi}), \\ y = \sinh\varphi = \frac{1}{2}(e^{\varphi} - e^{-\varphi}), \end{cases}$$

missä $-\infty < \varphi < +\infty$.

Samalla tavalla kuin elliptisessä tapauksessa todistetaan, että kaksi mittaviivan E kaarta silloin ja vain silloin ovat yhtä pitkät, kun kaarta vastaavat *jänteet* (jotka kaikki kuuluvat luokkaan $\overline{R}$) ovat yhtä pitkät.

Kaaren $Q = 1$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ pituus s on

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(dx)^2 - (dy)^2} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1.$$

(x, y)-koordinaateissa lausuttuna on

$$\varphi = \log(x + y) = \log(x \pm \sqrt{x^2 - 1}),$$

missä neliöjuuren etumerkki on sama kuin y-koordinaatin.

Kuten euklidisessa tapauksessa määritellään mittakäyrän E kaaren $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ vastaavan keskuskulman mittaluvuksi tuon kaaren pituus. Kulmayksikkönä on siis keskuskulma, jota vastaava kaari on ykkösen pituinen, esim. kaari, jota rajoittavat pisteet ($x = 1$, $y = 0$) ja

$$x = \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right), y = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

Edellä olemme tarkastaneet yksikköviivaa E. Jos se korvataan r-säteisellä samankeskisellä mittaviivalla

$$Q(x, y) = r^2,$$

saadaan kaarta $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$ vastaavan keskuskulman mittaluvuksi ω, jolloin

$$\cosh\omega = \frac{x_1 x_2 - y_1 y_2}{Q(x, y)}.$$

Kulman P_1OP_2 mittaluvun laskemiseksi, missä $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ ovat mielivaltaisia alueen $x > 0$, $|y| < x$ pisteitä, on yllä olevan kaavan asemesta käytettävä lauseketta

$$\cosh\omega = \frac{x_1x_2 - y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 - y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 - y_2^2}} = \frac{Q(x_1, y_1;\, x_2, y_2)}{\sqrt{Q(x_1, y_1)}\cdot\sqrt{Q(x_2, y_2)}},$$

missä $Q(x_1, y_1; x_2, y_2)$ on neliömuodon Q polarisoitu bilineaarimuoto.

Kaavassa olevat osoittajan ja nimittäjän tekijät ovat kaikki arvoltaan invariantteja affiineihin koordinaattimuunnoksiin nähden. Kaava määrää siis kulman ω, kun mielivaltaisessa koordinaatistossa on

$$Q(x, y) = ax^2 + 2cxy + by^2, \quad (ab - c^2 < 0),$$
$$Q(x_1, y_1; x_2, y_2) = ax_1x_2 + c(x_1y_2 + x_2y_1) + by_1y_2,$$

kulman sijaitessa siinä akselikulmassa, missä neliömuoto Q ja sen polarisoitu muoto ovat positiivisia (luokka R).

4.10. Metrinen perusfunktio vektorimuodossa

Elliptisessä tapauksessa olimme (kohta 3.12) perustaneet metriikan vektorifunktioon $G(u)$, joka on > 0, kun vektori $u \neq 0$, ja joka arvolla $u = 0$ häviää. Lisäksi se on homogeeni, astetta 1. Vektorin pituus on $|u| = G(u)$. Nämä ominaisuudet johdettiin pelkästään postulaateista III. 1, 2. Postulaateista III. 3, 4 seurasi edelleen, että $(G(u))^2 = Q(u)$ on positiivinen *definiitti* neliömuoto. Se johdetaan vastaavasta symmetrisestä bilineaarimuodosta $Q(u, v)$ asettamalla $u = v$, $(G(u))^2 = Q(u, u)$.

Lorentz-Minkowskin geometriassa taas perusfunktio $|G(u)| > 0$, lukuunottamatta niitä vektoreita, jotka ovat kahden mielivaltaisesti annetun, toisensa leikkaavan suoran (asymptoottien) L_1 ja L_2 suuntaisia. Näillä erikoisilla vektoreilla u funktio $G(u) = 0$.

Postulaatit III. 3, 4 määräävät $G(u)$:n siten, että

$$|u|^2 = (G(u))^2 = |Q(u, u)|,$$

missä $Q(u, u)$ on *indefiniitti* neliömuoto, joka häviää, kun u on suoran

L_1 (tai L_2) suuntainen. Vastaavaa symmetristä bilineaarimuotoa merkitään edelleen $Q(u, v)$:lla ($|Q(u, u)| = (G(u))^2$).

4.11. Kolmioepäyhtälö

Olkoot u ja v vektoreja, joilla on sama alkupiste 0 ja jotka kulkevat kulmassa, jossa $Q(u) \equiv Q(u, u) > 0$. Silloin pätee epäyhtälö

$$|u + v| \geqq |u| + |v|$$

Yhtälösuuruus vallitsee vain silloin, kun u ja v ovat viivallisesti riippuvia. Todistus on sama kuin kolmioepäyhtälön (3.13), sillä erolla, että mittaviiva E nyt on *kovera* (eikä kupera).

4.12. Skalaaritulo

Skalaaritulo määritellään kuten elliptisessä tapauksessa. Suorakulmaisia koordinaatistoja luonnehtii akselivektorien skalaaritulon häviäminen. Erikoisia suorakulmaisia koordinaatistoja ovat elliptisessä ja hyperbolisessa tapauksessa kohdissa 3.2 ja 4.3 tarkastetut koordinaatistot K_0, joissa mittaviivana on $x^2 + y^2 = 1$ ja $x^2 - y^2 = \pm 1$. Muut suorakulmaiset koordinaatistot, joissa E:n yhtälö säilyy invarianttina, saadaan K_0:sta *kiertämällä* akselistoa. Jos kiertokulma on ω, saadaan pisteen koordinaatit $\bar{x}$, $\bar{y}$ uudessa koordinaatistossa $\bar{K}_0$ vanhoista (x, y) muunnoksella

$$(4.5) \qquad \begin{cases} \bar{x} = x \cos \omega + y \sin \omega, \\ \bar{y} = -x \sin \omega + y \cos \omega \end{cases}$$

euklidisessa geometriassa ja *Lorentz-muunnoksella*

$$(4.6) \qquad \begin{cases} \bar{x} = x \cosh\omega - y \sinh\omega, \\ \bar{y} = -x \sinh\omega + y \cosh\omega \end{cases}$$

Lorentz-Minkowskin geometriassa.

4.13. Lorentz-Minkowskin geometrian fysikaalinen tulkinta

Tulkitaan nyt affiinin geometrian »piste» ja »suora» seuraavalla tavalla:

Piste P on *fysikaalinen tapaus*, joka tapahtuu »tässä ja nyt».

Edelleen on annettu eräitä *tapausjoukkoja L, joita nimitämme suoriksi*; ne edustavat »tasaisia liikkeitä».

Insidenssi $P — L$ merkitsee tässä tulkinnassa, että $P \in L$ (P kuuluu joukkoon L).

Järjestyksen suhde on annettu, kuten pykälässä 2: kolmesta tapauksesta on yksi ja vain yksi molempien muiden »välissä».

Täten on perusoliot ja perussuhteet tulkittu. Jos lisäksi oletetaan, että ne toteuttavat aksiomit I. 1—5, II. 1—5 on saatu »*affiini kinematiikka*». Affiinissa koordinaatistossa $K(x, y)$, missä x on »tapauksen» (pisteen (x, y)) »paikallinen» koordinaatti ja y sen »aika»-koordinaatti, tasaista liikettä edustavan suoran L yhtälö on ensimmäistä astetta (viivallinen).

Tämä »kinemaattinen systeemi» on täydellinen ja *isomorfi affiinin* tasogeometrian kanssa.

Sitä vastoin siinä ei vielä esiinny metrisiä käsitteitä. Jos »tapausjanojen» ja tapausvektorien pituus- ja kulmametriikka määritellään postulaattien III. 1—4 mukaan, siten että *mittaviiva on kovera*, tullaan olettamalla kaksi kongruenssiluokkaa R ja $\bar{R}$ Lorentz-Minkowskin geometriaan eli, fysikaalisesti tulkittuna, erikoisen suhteellisuusteorian kinematiikkaan.

Ristikulmaparissa R, joka sisältää ajan akselit (y-akselit), kulkeva vektori on »ajan-tapainen» tapausvektori. Sen määräämä suora tulkitaan jonkin fysikaalisen signaalin etenemisenä *tasaisella nopeudella*. Sen kulmakertoimen käänteisarvo on signaalin etenemisnopeus v, kyseessä olevassa Lorentz-koordinaatistossa K. Sopivassa Lorentz-koordinaatistossa tällainen »ajan-tapainen» vektori yhtyy ajan akseliin. Sellaisessa koordinaatistossa tuo vektori esittää *samanpaikkaisia* tapauksia.

Signaalinopeuden $|v|$ maksimiarvo on $= 1$, joka saavutetaan asymptoottien suuntaisilla »*valosignaaleilla*».

Ristikulmaparissa $\bar{R}$ kulkevat tapausvektorit (ja sen suuntaiset vektorit) esittävät tapauksia, jotka ovat »kausaalisesti neutraaleja». Sopivassa Lorentz-koordinaatistossa ne yhtyvät paikan akseliin (x-akseliin). Tällaisen suoran tapaukset P ovat *tämän* koordinaatiston suhteen *samanaikaisia*.

Tämän pitemmälle emme syvenny erikoisen suhteellisuusteorian kinematiikkaan. Geometrin-fysikaalisten ilmiöiden seikkaperäisempää periaatteellista selvittelyä sisältää teokseni [1].

§ 5. Galilei-geometria

5.1. Semidefiniitti tapaus

Palaamme aluksi vielä §:n 3 lauseeseen III.1. Siinä esitetty väite, jonka mukaan mittaviiva E täyttää kuperuuden ehdon, oli todistettava käyttämällä postulaatteja III. 1—4 (yksinomaan näiden *alkuperäisessä* muodossa). Tällöin kongruenssiluokkia R on vain *yksi*: R:ään kuuluvat janat ovat suuntansa puolesta mielivaltaisia. Edellisessä §:ssä 4 jo todistettiin, että E:n kolme pistettä A, B, C tällöin eivät voi olla koverassa asemassa keskipisteen O suhteen.

Seuraavassa tutkimme käsittelemättä jäänyttä tapausta, jolloin mittaviiva E sisältää kolme pistettä A, B, C jotka ovat *samalla suoralla*. Lauseen III. 1 todistuksen täydentämiseksi osoitamme, että tämä on ristiriidassa postulaattien III. 1—4 kanssa (mikäli kongruenssiluokkia on vain yksi).

Jos E:n pisteet A, B, C ovat suoralla viivalla, niin niiden määräämä kartioleikkaus surkastuu kahdeksi O:n suhteen symmetriseksi yhdensuuntaiseksi suoraksi. Jos koordinaatisto K valitaan, kuten edellä suorien yhtälö on

$$Q(x, y) = x^2 - 2cxy + y^2 = 1, \tag{5.1}$$

missä nyt $c = -1$. Muoto $Q = (x + y)^2$ on *positiivinen* ja *semidefiniitti*.

Kuten tapauksissa $|c| > 1$ on mukava siirtyä koordinaatistoon K_0 ottamalla nyt lausekkeet $x - y$ ja $x + y$ uusiksi koordinaateiksi. Jos näitä edelleenkin merkitään kirjaimilla x ja y, neliömuoto Q saa muodon

$$Q = y^2$$

Transformaatio T (vrt 3.2) on K-koordinaatistossa ($c = -1$)

$$x_1 = -2x_0 - y_0, y_1 = x_0$$

ja K_0-koordinaatistossa:

$$(T) \qquad x_1 = -x_0 - 2y_0,\ y_1 = -y_0.$$

Iteroimalla (T) lähtien pisteestä C_0 (x_0, y_0), joka on suoralla $x + y = 1$, saadaan pistejono (x_n, y_n) ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Parillisia arvoja n vastaavat pisteet ($x_0 + 2n$, 1), parittomia arvoja pisteet ($-x_0 - 2n$, -1), jotka kaikki ovat mittaviivalla

$$(E) \qquad y = \pm 1.$$

Nämä pisteet poistuvat äärettömän kauas kun $n \to \infty$, vastoin postulaatin III. 4 vaatimusta. Mittaviiva E siis ei voi sisältää kolmea saman suoran pistettä. Lause III. 1 on siten täydellisesti todistettu.

5.2. Galilei-geometria

Jos luovutaan vaatimasta, että postulaatit III vallitsevat tarkasteltujen janojen suunnista riippumatta (jolloin kongruenssiluokkia R on vain yksi), mittaviivan E kuperuus ei enää välttämättömästi ole voimassa. Jos alkuperäiset postulaatit III rajoitetaan koskemaan vain samaan kongruenssiluokkaan kuuluvia janoja ja kongruenssiluokkia on kaksi, R ja $\bar{R}$, johduimme kohdassa 4.8 Lorentz-Minkowskin geometriaan, missä mittaviiva E koostuu kahdesta konjugaattihyperbelistä H ja $\bar{H}$.

Edellä (kohdassa 5.1) suoritettu tarkastelu, jota käytimme lauseen III. 1 todistamiseksi, johtaa huomionarvoiseen uuteen tulokseen elliptisen ja hyperbolisen tapausten välillä olevassa rajatapauksessa, jolloin kongruenssiluokka R käsittää annetun suoran L rajoittamien puolitasojen sisäpuolet.[1]

[1] Rajasuora L jää tällöin erikoisasemaan, se voidaan metrisoida ottamalla sen yksikköjana mielivaltaiseksi, jolloin paralleelisiirtoon perustuva vektorialgebra määrää L:n suuntaisten janojen mittaluvut.

Jos mittaviiva E tällöin sisältää kolme pistettä A, B, C, jotka ovat L:n suuntaisella suoralla, (rajoitettujen) postulaattien III käyttö kohdan 5.1 mukaan osoittaa, että mittaviiva E sisältää äärettömän monta pistettä $C = C_0, C_1, \ldots, C_n, \ldots$, jotka vuorotellen sijaitsevat kahdella L:n suuntaisella suoralla L_1 ja L_2. Samaan tapaan kuin tapauksissa $|c| > 1$. todistetaan, että mittaviiva E yhtyy näihin suoriin, joiden yhtälö yllä käytetyssä koordinaatistossa K_0 on $y^2 = 1$.

Näin määriteltyä metrisoitua affiinia tasoa nimitämme kohdassa 5.4 esitettävän fysikaalisen tulkinnan perusteella *Galilei-järjestelmäksi.*

5.3. Ortogonaalijärjestelmät

Affiinin transformaation avulla määritellään K_0:n lisäksi *ortonormoitujen* koordinaatistojen luokka $(\bar{K})$, jossa Q säilyttää *invariantin* muodon $Q = y^2$. Siirrymme siis järjestelmästä K_0 uuteen järjestelmään $\bar{K}$ muunnoksella

$$\bar{x} = \alpha x + \beta y,\ \bar{y} = \gamma x + \delta y.$$

Jotta Q siinä säilyttäisi muodon y^2, tulee olla

$$\bar{x} = \pm\, x + \beta y,\ \bar{y} = \pm\, y, \tag{5.3}$$

missä vakio β jää mielivaltaiseksi.

5.4. Järjestelmän fysikaalinen tulkinta

Samoin kuin hyperbolisessa tapauksessa ($|c| > 1$), tulkitsemme nyt peruskäsitteet »piste», »suora», »insidenssi», »järjestys» fysikaalisesti (4.13). *Metriikka* on tapauksessa $|c| = 1$ määritelty toisin, ja ortonormoidut koordinaatistot poikkeavat sen vuoksi Galilei-järjestelmässä vastaavista Lorentz-Minkowskin koordinaatistoista. Jos kaavoissa (5. 3) otamme $+$-merkin ja merkitsemme $\beta = -v$, saamme

$$\bar{x} = x - vy,\ \bar{y} = y. \tag{G}$$

Kun x tässä tulkitaan »tapauksen» eli »pisteen» paikan koordinaatiksi, y sen ajan koordinaatiksi, (G) on *Galilei-muunnos*, joka klassillisessa, Newtonin fysiikan kinematiikassa välittää siirtymisen järjestelmästä K toiseen järjestelmään $\bar{K}$, joka liikkuu K:n suhteen tasaisella nopeudella v.

Jälkimmäinen yhtälö (G) lausuu, että ajan koordinaatti tällöin on invariantti: klassillisen fysiikan *ajan käsite on absoluutti.*

III AFFIINI GEOMETRIA JA PROJEKTIIVI GEOMETRIA

1. Dualiteetin periaate

Luvussa I huomautettiin jo, että kolmesta ensimmäisestä insidenssiaksiomista kaksi, I. 1 ja I. 2, ovat keskenään *dualisia*. Jos niissä vaihdetaan perusoliot »piste» ja »suora» keskenään, aksiomipari jää kokonaisuudessaan muuttumattomaksi: sen kaksi aksiomia vain vaihtaa paikkaa.

Tätä symmetriaa affiini geometria ei kauttaaltaan noudata, sillä kolmannelta insidenssiaksiomilta puuttuu sen dualivastine. Lausuuhan aksiomi I. 3, että kahta pistettä vastaa täsmälleen yksi niiden kautta kulkeva suora. Sitä vastoin kahta suoraa ei aina vastaa yhteinen insidentti piste. Myöhempi insidenssiaksiomi I. 4, paralleeliaksiomi, päinvastoin lausuu, että on suoria, joilla ei ole yhteisiä pisteitä.

Tätä insidenssijärjestelmän asymmetriaa voi pitää puutteena. Kuten lukuisissa muissa matemaattisissa opeissa herää kysymys, voidaanko ko. puute poistaa permanenssin periaatetta noudattamalla, ottamalla käytäntöön uusia »ideaalielementtejä».

Kuten aikaisemmin jo esitettiin, permanenssiperiaate sisältää sen, että puutteellinen järjestelmä *täydennetään* ottamalla käytäntöön *pienin* määrä uusia alkioita, joka riittää ko. puutteen korjaamiseksi. Tämä vaatimus yleensä voidaan toteuttaa vain yhdellä tavalla. Näin on myös, kun affiinigeometriaa pyritään täydentämään siten että dualiperiaate toteutuu.

2. Ideaalipisteet ja suorat

Miten siis affiini insidenssijärjestelmä, joka toteuttaa neljä insidenssiaksiomia I. 1—4, on täydennettävä, jotta dualiperiaate astuisi voimaan?

Jotta aksiomin I. 3 dualilause (»kahdella eri suoralla on yksi (ja vain yksi) insidentti, yhteinen piste») olisi voimassa, on kahdella yhdensuuntaisella suoralla L_1 ja L_2 oleva yhteinen piste. Tällaiseen suorapariin liitetään siis uusi »ideaalipiste», joka määritellään insidentiksi näiden suorien kanssa.

Jos nyt suora L_3, joka ei yhdy suoriin L_1, L_2, on näiden suorien suuntainen, on näillä kummallakin oleva piste yhteisenä L_3:n kanssa. Permanenssiperiaatteeseen sisältyvän minimivaatimuksen nojalla sovitaan siitä, että keskenään *yhdensuuntaisten suorien ideaalipisteet yhtyvät*.

Sitä vastoin kahden erisuuntaisen, toisensa leikkaavan suoran ideaalipisteet on katsottava toisistaan erillisiksi. Sillä muuten suorilla olisi leikkauspisteen lisäksi tuo ideaalipiste toisena yhteisenä pisteenä, ja koska permanenssiperiaatteen mukaan aksiomin I. 3 tulee vallita ideaalipisteisiinkin nähden, yhtyisivät suorat L_1 ja L_2, vastoin oletusta.

Samansuuntaisten suorien joukkoihin liitetään siis *kääntäen yksikäsitteisesti* ideaalipisteet (joita luonnollisesta syystä on tapana nimittää myös »äärettömän kaukaisiksi»).

Myös *suoriin* nähden on suoritettava täydennys. Aksiomin I. 3 säilyminen vaatii, että kahden ideaalipisteen kautta kulkee suora. Tämä ehto toteutuu minimiperiaatteen mukaisesti, jos suorien joukkoon lisätään *yksi ideaalisuora*, joka määritellään insidentiksi ideaalipisteiden (ja vain näiden) kanssa.

3. Projektiivi insidenssigeometria

Näin muodostuu *projektiivin geometrian* järjestelmä. Siinä ei lainkaan esiinny suorien yhdensuuntaisuutta. Desargues'n aksiomi I. 5 tulee nyt, affiinissa asemassa olevien kolmioiden asemesta koskemaan kolmioiden »perspektiivisyyttä». Se kuuluu:

»Jos kolmioiden ABC ja $A'B'C'$ kärkien yhdistysjanat AA', BB', CC' leikkaavat toisensa samassa pisteessä, niin suorien AB ja $A'B'$, BC ja $B'C'$, AC ja $A'C'$ leikkauspisteet ovat samalla suoralla.»

4. Järjestyksen suhde

Jos piste B affiinin geometrian mielessä on pisteiden A ja C välissä, niin suoran ABC ideaalipiste D ja piste B muodostavat pisteparin, joka »erottaa» toisistaan pisteet A ja C. Siirryttäessä affiinista geometriasta projektiiviin järjestelmään, on järjestyksen suhde II muutettava seuraavaksi:

Jokaista pisteparia A, B ($A \neq B$) vastaa pisteparien $\{C, D\}$ joukko (joiden sanotaan »erottavan» pisteet A, B toisistaan).

Tämän suhteen oletetaan täyttävän eräitä järjestyksen aksiomeja, jotka helposti nähtävällä tavalla johdetaan affiinin geometrian aksiomeista II. Puuttumatta lähemmin tähän kysymykseen huomautamme vain, että projektiivin tason suora on *suljettu* viiva (kuten esim. euklidisen tason ympyräviiva). Sillä voidaan kiinnittää kaksi vastakkaista kiertosuuntaa. Näin ei ole koko projektiivin *tason* laita. Tämä on suunnistumaton pinta: jos pisteen P ympäristössä kiinnitetään tietty kiertosuunta, niin tämä suunta, kun sitä jatkuvasti seurataan, P-pisteen kulkiessa suoran L, muuttuu *vastakkaiseksi*, P:n suoritettua täyden kierroksen suljetulla viivalla L.

5. Projektiivin tason malli

Havainnollisen mallin M, joka selventää projektiivin tason ominaisuuksia, saa seuraavasta euklidisen tason kuviosta.

Olkoon Y *euklidisen* geometrian suljettu ympyrä-alue (jonka siis muodostavat ympyrän sisä- *ja* reunapisteet). Projektiivi malli M muodostuu tulkitsemalla:

1) »Piste» sama kuin Y:n piste P. Kaksi »pistettä» on identtistä, silloin kun ne (euklidisessä mielessä) ovat identtisiä, seuraavalla lisäyksellä: Kaksi Y:n *kehän* pistettä P_1 ja P_2, jotka ovat diametraalisia, s.o. saman (Y-ympyrän) halkaisijan päätepisteinä, *samaistetaan* mallissa M.

2) »Suora» on a) ympyrässä Y kulkeva (euklidinen) ympyränkaari, joka leikkaa Y:n kehän kahdessa diametraalisessa pisteessä; b) Y-ympyrän kehä.

Edellä olemme lyhyesti esittäneet, miten affiini geometria permanenssin periaatteen nojalla voidaan täydentää projektiiviksi geometriaksi. Affiineja aksiomeja vastaa projektiivin geometrian dualinen aksiomijärjestelmä.

Tämän viimeksi mainitun aksiomijärjestelmän nojalla voidaan affinista geometriasta riippumattakin kehittää projektiivi tasogeometria. Kääntäen: jos projektiivista tasosta *poistetaan* mielivaltainen suora pisteineen, siitä muodostuu affiini taso, jossa poistettu suora sekä sen pisteet vastaavat tason »äärettömän kaukaisia» perusalkioita.

KIRJALLISUUTTA[1]

Greub, W., [1], Der Jordansches Kurvensatz in der affinen Geometrie, Ann-Acad. Sci. Fenn., Mathematica-Physica, 181, 1955.
Hilbert, D., [1], Grundlagen der Geometrie, 10. Auflage, B. G. Teubner, Stuttgart 1968.
Lorentz, H. A., [1], Collected Papers.
Minkowski, H., [1], Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge bewegter Körper.
[2], Gesammelte Abhandlungen, B. 2, XI.
Moulton, F. R., [1], A simple non-desarguesian plane geometry, Transactions Math. Soc, 1902.
Nevanlinna, R. [1], Suhteellisuusteorian periaatteet, WSOY, 1962.
Pasch, M., [1], Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig, 1888, s. 21.
Senft, W., [1], Über die Einführung des Kongruenzbegriffes in der Theorie der linearen Raüme, Dissertation, Zürich 1955.

[1] Alan erittäin laajasta kirjallisuudesta mainitaan alempana vain teoksia, joihin nämä luennot välittömästi liittyvät.

HAKEMISTO

Affiini geometria 1
– koordinaatisto 45, 47
– kuvaus 53
– muunnos 52, 66
Aksiomit, insidenssin 2
– järjestyksen 12
– projektiivit 97, 98
Algebra, vektorien 36
– janojen 56
– kulmien 74
Analyyttinen geometria 49
Aritmeettinen malli 19
Arkhimedeen lause 42

Banach XI
Bolyai 7

Dedekindin aksiomi 25
– leikkaus 26
Desargues'n aksiomi 34

Ekvivalenssi XI, 31
Einstein XI
Ellipsi XI, 69, 70
Eukleideen geometria XI, 66
Euklidinen pituusmetriikka 70
– kulmametriikka 73

Finiittinen malli 4, 5, 9, 12, 13
Fysikaalinen tulkinta 91, 94

Galilei-geometria 92, 93, 94
Gauss 11
Greub 24, 100
Hausdorff 24
Hilbert 11, 55, 100
Hyperbeli XI, 84
Hyperbolinen tapaus 78

Ideaalialkiot 96, 97
Insidenssin suhde IX, 1, 97
Invarianssi 64, 65
Isomorfia 5, 41, 51, 91
Iteraatio 67

Jana 21
Janojen algebra 56
Jordan'in lause 23
Järjestyksen suhde 11, 16, 98
– aksiomit 12, 98
Järnefelt VII, 13, 49

Ketonen VII
Kivimäki VII
Kolmio 23
Kolmioepäyhtälö 76, 90
Kongruenssi 55
Kongruenssiluokat 82
– janojen 55, 57
– postulaatit 56, 61, 83
– kulmien 60
Konveksi 66, 77
Kovera 79, 89, 84, 91
Kulma
Kulmien metriikka 74, 87
Kupera 66, 68, 69, 79
Kustaanheimo VII

Lobatschewski 7
Lorentz 86, 100
Lorentz-muunnos 90
Lorentz-Minkowskin geometria 86
Lukusuora 40, 43

Mach 57
Metriikka, euklidinen 70
– hyperbolinen
– kulmien 73, 74
Metrinen neliömuoto 71, 87
– perusmuoto 59, 75, 89, 92
Minimivaatimus 57
Minkowski XI, 100
Minkowskin geometria XI, 77
Mittaviiva XI, 58, 62, 68, 69, 71, 79, 87, 91, 93
Moulton 34, 100

Neliömuoto 64, 75, 87, 92

Paralleeliaksiomi 30, 96
Paralleelisiirto 31, 32, 33
Pasch 14, 15, 16, 27, 28, 100
Permanenssin periaate 57
Perusalkiot IX, 1
Perussuhteet IX, 1
Perussäännöt IX
Projektiivigeometria 96
Puolisäde 20
Puolitaso 20, 21

Rajaparalleeli 30
Riippumattomuus IX, 6, 7, 15, 18, 33, 34
Ristiriidattomuus IX, 3, 5, 13, 15, 18, 20

Senft 82, 100
Skalaaritulo 77, 90

Topologia 24
Tähtimäinen 59
Täydellisyys 18, 20, 36, 49, 50, 51, 55

Vektorin käsite 31
– suunta 31
– paralleelisiirto 32, 33
Vektorialgebra 36
Verranto-oppi 46

Yhdensuuntaisuus X, 26
– suorien 26, 29
– vektorien 31, 36
– kulmien 60
– siirto 31
Yhdensuuntaisuusoppi 26
Ympyränkaaren pituus 71